OMSI

Le mot du Resp'

Salut ptit bizz, j'espère que tu as vécu une inté de folie ! Le mieux reste à venir ;-).

Petit(e) biz voici ton annale d'OMSI. Il te servira plus d'une fois, tu le verras. C'est un peu un guide pour cette année, car l'OMSI ressemble à la Term, mais peut vite te faire chavirer. Mais ne t'inquiète pas, vos CDP préférés vont t'aider en cours.

Ce poly te servira de révision de dernières minutes, ou de dernière tentative à comprendre le cours, dans le cas ou boire ta pinte avec tes potes était une meilleure idée que de travailler. Et tant mieux si ça l'était car entre les cours, et entre les IE, la bière donne de la vie. Donc même si tu commences l'année avec un petit 6, ta pinte te réconfortera, et l'ambiance de la k-fête de donnera du moral.

En conclusion, l'INSA ce n'est pas que du travail, un $17m^2$, ou des IE pas faciles. C'est surtout une bonne ambiance dans les turnes, des bonnes personnes, et plein de motivation.

Mais avant toute chose, grosse dédicace à la meilleure liste, aka les INS'ANESTHESISTES (avec 5 « S » svp) qui a clairement bouleversé ma première année ici (on n'a pas majoré les costumes pour rien). Enormes dédicaces aussi aux Tijuana, en particulier Eolia, la meilleure marraine claquée au sol, la cobiz ziket, j'ai nommé Anaëlle, Nathan le plus charismatique des resp de mif, Thomas le resp TTT, Sixtine partie trop tôt, Emilie, psk l'INSA c'est avant tout des rencontres $\in]-\infty; 3[$. Big up à Nicolas, qui en plus d'être incroyable (notamment en pompes et tractions), aura supporté 6 costumes dans la turne (vive la 226). Force aux CDParadis, vous êtes clairement au-dessus. P'tit clin d'œil aussi à l'AS escalade et au groupe 11. Et surtout, grosse dédicace à mes deux compères de tous les jours, Aimé et Eliott, avec qui j'ai clairement passé une des meilleures années de ma vie <3.

Bon bref je te laisse réviser et médite bien sur cette phrase du professeur Chen :
« [Biz], entraîne ton Pokémon au combat pour qu'il devienne fort ! »

~Professeur Chen~

(parce que le thème c'est quand même Pokémon he he)

Timi

Table des matières

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Wsh le biz !!!

J'espère que t'as passé une inté de folie avec ta mif et les meilleurs CDPs !! En tout cas si t'es en train de lire ce cours c'est que l'IE d'OMSI arrive un peu plus vite que prévu… Mais tkt on va tout faire pour que ça se passe bien !

Avant de partir sur le cours on va d'abord s'occuper des dédicaces !!

Comment commencer autrement qu'avec la meilleure mif de l'INSA : Les Sexaps !! J'ai passé une inté incroyable avec vous !! Gros Big up à la lignée du dd sushi et à mo parrain Nico qui m'a couché beaucoup trop de fois pendant l'inté !

Bon alors, on passe aux SCAN, pas grand-chose à dire à part que c'est la meilleure filière, surtout le groupe 63 que j'ai soudoyé avec des crêpes pour être délégué. À nos larmes en fin d'IE et à nos Kfets de classe un peu trop arrosées (hein jerem). Que des gens géniaux dans cette filière, trop nombreux pour tous les citer, vous êtes vraiment les sangs je vous kiffe trop !!!

On finit en beauté avec les SALOOOON, c'est le best combo yeahh, une liste de bg où j'ai fait mes plus belles rencontres et avec qui j'ai les meilleurs souvenirs de l'INSA, depuis notre rencontre jusqu'à la campagne et maintenant encore vous me faites délirer tous les jours. Je vous aime tous beaucoup trop (sauf toi lari) merci pour être qui vous êtes et merci pour la campagne <3

Willy aka Jack Dalton

COURS

1. L'ensemble des nombres complexes

1) Définition

Les complexes, pour ceux qui étaient en maths expertes bonne nouvelle, il n'y a rien de nouveau par rapport à l'année dernière (si vous avez fini le programme bien sûr). De toute façon, si tu n'avais pas compris ce chapitre ou si tu n'étais pas en maths expertes, pas de problèmes je vais t'expliquer tout ce qu'il faut savoir.

Les complexes, c'est un ensemble encore plus grand que celui des réels, on le note $\mathbb{C}$. La especialidad des complexes c'est le fameux nombre imaginaire i qui donne au carré $i^2 = -1$. Attention, tu verras aussi en physique le « j », mais c'est la même chose. Pour finir, les complexes n'ont pas d'ordre donc tu peux les classer comme tu veux. Sinon, les complexes suivent les mêmes règles que les réels pour l'addition et la multiplication.

2) Notation

On note souvent un complexe z. On le définit d'abord sous forme **algébrique** avec une partie réelle **Re(z)**, ici, a, et une partie imaginaire **Im(z)**, ici, b :

$$\boxed{z = a + ib}$$

On peut aussi noter un complexe sous sa forme **trigonométrique**. On fait alors intervenir un module **r** et un argument $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Enfin, il existe une troisième notation : la forme **exponentielle**, qui reprend le même module **r** et le même argument $\boldsymbol{\theta}$ que la forme trigo :

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

De manière générale, si tu as des **sommes** de complexes, privilégie la **forme algébrique**, et si tu as des produits ou des **puissances** de complexes, privilégie la **forme exponentielle**. La forme trigonométrique sert surtout d'intermédiaire pour passer de l'une à l'autre, ou pour l'anti-linéarisation (cf. §2.2), mais elle est rarement utilisée telle quelle.

3) Particularités

- On appelle conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib = re^{i\theta}$ le complexe noté **:** $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta}}$
- Le module de z est $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$
- L'argument de z est $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{arg}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{arctan}\ (\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}})$ (valable pour a>0)
- z est un nombre réel $\Leftrightarrow z = Re(z)$
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z = i\ Im(z)$
- Si $a = 0$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ pour $b > 0$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ pour $b < 0$
- Si $z \in \mathbb{R}$, $z = \bar{z}$
- Si $z \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur), $z = -\bar{z}$
- $\boldsymbol{z\bar{z}} = |\boldsymbol{z}|^{\mathbf{2}}$
- Soient trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C :
  - $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$
  - $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_b - z_a|$

2. Intérêt et utilisation des nombres complexes

1) Les équations à coefficients complexes

Les nombres complexes permettent de résoudre toute équation du second degré.

Exemple :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Avec les réels, nous n'avions des solutions à cette équation que si le discriminant (Δ) était supérieur ou égal à 0.

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

- **Si** $\Delta = 0$, on a une solution double réelle
- **Si** $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles **:** $\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$
- **Si** $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées : $\boldsymbol{x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

Dans le cas où Δ est un nombre complexe et que l'on veut déterminer sa racine, on pose $\boldsymbol{\delta = \alpha + i\beta}$ avec $\boldsymbol{\delta^2} = \Delta = \boldsymbol{a + ib}$. En développant, on trouve :

$$\delta^2 = \Delta$$
$$(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$$
$$\alpha^2 - \beta^2 + i(2\alpha\beta) = a + ib$$

Puis, avec l'égalité des modules, on a :

$$|\delta^2| = |\Delta|$$
$$|\delta|^2 = |\Delta|$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On obtient alors le système suivant (la première et la troisième ligne permettent déterminer α et β, la deuxième ligne permet de savoir si α et β sont de même signe ou non) :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

2) La linéarisation et l'anti-linéarisation

Il existe une écriture complexe pour les fonctions trigonométriques cosinus et sinus, appelée **formule d'Euler** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,;\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$$

Ces formules permettent de **linéariser une puissance** de cosinus ($cos^n\theta$) ou de sinus ($sin^n\theta$) afin de l'exprimer en fonction de cos ou sin au premier degré, grâce notamment à la formule du binôme de Newton :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z)^k (z')^{n-k}}$$

Anti-linéariser, c'est passer d'une expression avec des $\cos(n\theta)$ et des $\sin(n\theta)$ à une expression avec des puissances de cos ou de sin. Pour cela, on utilise la **formule de Moivre** (facilement démontrable avec la forme exponentielle) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

On peut alors anti-linéariser un $\cos n\theta$ ou un $\sin n\theta$ en considérant que :

- $\cos n\theta = Re(\cos n\theta + i \sin n\theta) = Re((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$
- $\sin n\theta = Im(\cos n\theta + i \sin n\theta) = Im((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$

EXERCICES

Exercice 1 :

Trouve la forme algébrique des complexes suivants (faut que tu saches le faire parce que tu n'auras sans doute pas la calculette à l'IE :'( ):

a) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $e^{\,i2n\pi}$ c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{i-1}\right)^{10}$

Exercice 2 :

Résous l'équation suivante : $x^2 - (1+2i)x = -1 - 7i$

Exercice 3 :

1) Linéarise $cos^6(x)$

2) Anti-linéarise $\sin(5x)$.

CORRIGE

Exercice 1 :

$a)\ 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$

$b)\ e^{i2n\pi}=\left(e^{i2\pi}\right)^n=1^n=1$

$c)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{i-1}\right)^{10}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^{10}=e^{-i\frac{30\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

Exercice 2 :

On reprend la méthodologie du §2.1 :

$$\Delta=-7-24i$$

On cherche δ :

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-7\\ 2\alpha\beta=-24\\ \alpha^2+\beta^2=25\end{cases}$$

On trouve alors :

$$\sqrt{\Delta}=\pm 3-4i$$

On a donc les solutions :

$$x_1=-1+3i$$

$$x_2=2-i$$

Exercice 3 :

1) Formule d'Euler :

$$cos^6(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6=\frac{e^{6ix}+6e^{4ix}+15e^{2ix}+20e^{0ix}+15e^{-2ix}+6e^{-4ix}+e^{-6ix}}{64}$$

$$\cos^6(x)=\frac{\cos(6x)+6\cos(4x)+15\cos(2x)+10}{32}$$

2) Formule de Moivre :

$\sin(5x)=Im(\cos 5x+i\sin 5x)=Im(\cos x+i\sin x)^5$

$=Im(\ cos^5x+5i\ cos^4x\sin x-10\ cos^3x\ sin^2x-10i\ cos^2x+5\cos x\ sin^4x+\ i\ sin^5\ x)$

$$\sin(5x)=5\ cos^4x\ \sin x-10\ cos^2x+sin^5x$$

Chapitre 2 : Produits scalaire, vectoriel et mixte

Salut mon p'tit loulou ! Si tu lis ça aujourd'hui, c'est sûrement que l'inté est finie et que l'année avance. L'IE d'OMSI approche peut-être à grands pas mais tu vas voir qu'il n'y a pas de raison de s'affoler pour ce chapitre. Ça peut paraitre stressant de n'avoir qu'une IE pour le semestre mais celle-là elle met vraiment bien. L'OMSI c'est surtout des méthodes et des petites astuces qu'on va t'aider à bien intégrer.

Bon mon chenapan, répète après nous : les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthebites !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !! les insanésthesistes !!

Re-répète pour voir : CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHIBRE'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! CHAP'S ANGELS !! HERVé !!

Bonne année mon poulet !

Tits, Timi, Mélina et Gouliche

COURS

---

1. Rappel sur les vecteurs

Tout d'abord, un vecteur est défini par 4 composantes :

- une direction (celle de la droite qui porte le vecteur)
- un sens (défini par une flèche)
- une norme, notée $||\vec{u}||$
- un point d'application, utile en physique, moins en maths.

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ est défini par $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ et a le même sens que $\vec{v}$.

Si deux vecteurs ont la même direction (ou que l'un des deux est le vecteur nul), on dit qu'ils sont colinéaires. Et on peut alors trouver une combinaison linéaire qui donne le vecteur nul. On peut donc écrire :

$$\vec{u} = k\vec{v} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } \exists(\mathrm{a,b}) \in \mathbb{R}^2, a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs directions sont contenues dans un même plan (ou si l'un d'eux est nul). On peut donc exprimer un des trois vecteurs par combinaison linéaire des deux autres : $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La norme du vecteur $\vec{u}$, de coordonnées (x, y, z), est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Les produits de vecteurs

1) Produit scalaire

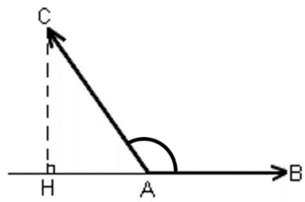
On va commencer avec de petites révisions sur le produit scalaire, que tu connais déjà. Tu vas voir, il n'y a pas grand-chose de nouveau.

Le **produit scalaire** est une opération qui donne en résultat un scalaire (comme son nom l'indique) appartenant à $\mathbb{R}$. Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut :

$$\vec{u}\,.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Le produit scalaire correspond au produit de la norme de $\vec{u}$ et de la norme de la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ (au signe près).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|$$



Propriétés du produit scalaire :

- Commutativité : $\vec{u}\,.\vec{v} = \vec{v}\,.\vec{u}$ (l'ordre des vecteurs n'a pas d'importance)
- Bilinéarité : $(a\vec{u} + b\vec{v})\,.\vec{w} = a\vec{u}\,.\vec{w} + b\vec{v}\,.\vec{w}$ (c'est comme la distributivité, mais en vecteurs)
- En coordonnées cartésiennes, avec $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$, on a :
  $$\vec{u}\,.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\,.\vec{v} = 0$
  Le produit scalaire peut ainsi par exemple servir à prouver que des angles sont droits. Le vecteur nul est donc orthogonal à tous les vecteurs (c'est le seul).

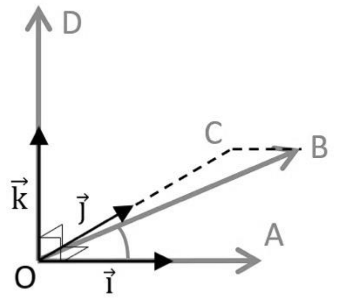
2) Produit vectoriel

Là on attaque le nouveau ! (sauf si tu as fait SI l'année dernière, auquel cas tu fais partie de l'élite, shake my hand bro)

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs, encore une fois comme son nom l'indique, renvoie cette fois-ci un vecteur. On le note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et on a :

- le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et orthogonal à $\vec{v}$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$

La norme du produit vectoriel est égale au produit de la norme de $\vec{u}$ et de la norme de la projection de $\vec{v}$ sur la normale à $\vec{u}$ dans le plan $(\vec{u}, \vec{v})$.



$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$$

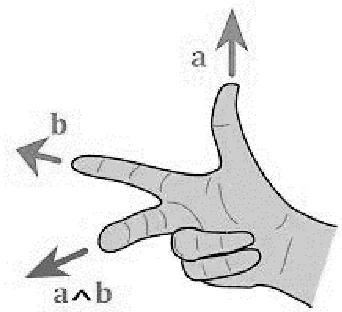
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OD}\| &= \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \\ &= \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|\end{aligned}$$

Propriétés du produit vectoriel :

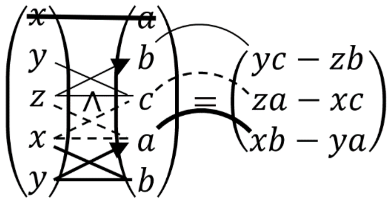
- Anticommutativité : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$ (l'ordre des vecteurs est important)
- Bilinéarité : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $A = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

Nous allons maintenant voir comment calculer le produit vectoriel, c'est un peu particulier, mais en prenant le temps de se poser on y arrive bien.

Pour déterminer le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$, il faut se servir de sa main droite (fameuse méthode de la main droite). Ce point est important, mais tu prendras bien le temps de le revoir en mécanique au début du semestre 2. Si ton pouce et ton index représentent respectivement les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, alors ton majeur représentera le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Ainsi, en orientant correctement ta main tu pourras toujours trouver le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$.



Pour la norme, soit tu utilises l'angle entre les deux vecteurs (formule vue juste avant avec le sin), soit tu utilises les coordonnées cartésiennes (je t'explique juste après).



Calcul du produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{pmatrix}$$

Pour obtenir ce résultat, tu dois d'abord réécrire les deux premières coordonnées de chaque vecteur en plus sous chaque vecteur, puis tu rayes la première ligne et tu obtiens le résultat avec des « produits en croix ».

3) Produit mixte

Encore un nouveau, le produit mixte, mais qui en fait est juste une combinaison des deux précédents (pas grand-chose de nouveau finalement).

Le **produit mixte** de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donne un scalaire réel, il est noté $((\vec{u},\vec{v},\vec{w}))$et est défini par : $((\vec{u},\vec{v},\vec{w})) = \vec{u}\,.(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\ \wedge\vec{v})\,.\vec{w}$

<u>Attention</u>, ne confonds pas, l'écriture $\boldsymbol{\vec{u}}\wedge(\boldsymbol{\vec{v}}\,.\boldsymbol{\vec{w}})$ **n'a aucun sens**, en effet $(\vec{v}\,.\vec{w})$ donne un scalaire, or le produit vectoriel n'est possible qu'entre deux vecteurs, pas entre un vecteur et un scalaire.

<u>Propriétés du produit mixte :</u>

- Antisymétrie : $((\vec{u},\vec{v},\vec{w})) = -((\vec{v},\vec{u},\vec{w}))$, le produit mixte vaut donc son opposé lorsque l'on inverse deux vecteurs dans son écriture, peu importe lesquels.
- Invariance par permutation circulaire : $((\vec{u},\vec{v},\vec{w})) = ((\vec{v},\vec{w},\vec{u})) = ((\vec{w},\vec{u},\vec{v}))$, le produit mixte est égal, tant que l'on conserve « l'ordre » de base dans lequel il est écrit, tu peux te servir de ta main droite pour ce point.
- Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est $V = \|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\|$
- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow ((\vec{u},\vec{v},\vec{w})) = 0$.

3. <u>Barycentre</u>

Physiquement, le barycentre correspond au point où l'on pourrait faire tenir un solide sur un doigt en équilibre.

Soient (A_1, m_1) et (A_2, m_2) deux points pondérés tels que $A_1 \neq A_2$, m_1 ou m_2 non-nuls (avec m_1, m_2 correspondant à la masse des points).
Le barycentre est un point G tel que : $m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$

On utilise cependant plus souvent la formule suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{OA_2}$$

Et on peut exprimer cette formule en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_1 x_{A_1} + m_2 x_{A_2}}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{m_1 y_{A_1} + m_2 y_{A_2}}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{m_1 z_{A_1} + m_2 z_{A_2}}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}$$

Bien évidemment, s'il y a plus de deux points, c'est les mêmes formules avec autant de vecteurs que tu le souhaites en faisant la somme de toutes les masses au dénominateur.
Remarques :

- Le barycentre G est unique.
- G appartient au segment $[A_1, A_2] \Leftrightarrow m_1 \times m_1 > 0$
- Si $m_1 = m_2$, alors G est le milieu de $[A_1, A_2]$, on l'appelle l'isobarycentre de A_1 et A_2
- Le barycentre est associatif : pour calculer le barycentre de trois points A_1, A_2 et A_3, on peut par exemple, calculer le barycentre H de A_1 et A_2, puis déterminer le barycentre total G du système en calculant le barycentre entre H et A_3.

C'est fini pour la partie cours, on te laisse avec deux petits exercices pour appliquer les bases, et bon courage pour la suite ! Cœur sur vous <3

EXERCICES

Exercice 1 :

Soient les vecteurs $\vec{u}(1,3,4)$, $\vec{v}(0,4,2)$ et $\vec{w}(2,0,3)$:

1) Calculer le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$.
2) En déduire l'angle formé entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3) Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}$, ainsi que l'angle formé par ces deux vecteurs.
4) Calculer $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
5) En déduire le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 2 :

Soient A et B deux points distincts. Construire s'il existe le barycentre :
a) G des points pondérés $(A;\ 4)$ et $(B;\ 2)$
b) H des points pondérés $(A;\ -1)$ et $(B;\ 3)$
c) J des points pondérés $(A;\ -1)$ et $(B;\ -5)$

CORRIGE

Exercice 1 :

1) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 1 * 0 + 3 * 4 + 4 * 2 = 20$

2) On a $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 20$ et $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos(\vec{u}\,,\vec{v})$

Or $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

On a donc $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|*\|\vec{v}\|} = 0{,}877 \iff \widehat{\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}}} = 0{,}501 \text{ rad}$

3) On calcule $\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ puis $A = \|\vec{u} \wedge \vec{w}\| = \sqrt{142}$

Ensuite, on a $\|\vec{u} \wedge \vec{w}\| = \sqrt{142}$ et $\|\vec{u} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{u}\| * \|\vec{w}\| * \sin(\vec{u},\vec{w})$

Or $\|\vec{u}\| = \sqrt{26}$ et $\|\vec{w}\| = \sqrt{13}$

Ainsi : $\sin(\vec{u},\vec{w}) = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|*\|\vec{w}\|} = 0{,}648 \iff \widehat{\vec{u},\vec{w}} = 0{,}705 \text{ rad}$

4) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (-10) * 2 + (-2) * 0 + 4 * 3 = -8$

Donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -8$

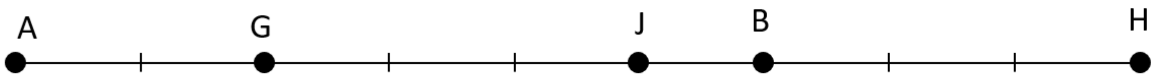
5) $V = 8$

Exercice 2 :

a) $\overrightarrow{AG} = \frac{m_A\overrightarrow{AA}+m_B\overrightarrow{AB}}{m_A+m_B} = \frac{2}{6}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AH} = \frac{m_A\overrightarrow{AA}+m_B\overrightarrow{AB}}{m_A+m_B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AJ} = \frac{m_A\overrightarrow{AA}+m_B\overrightarrow{AB}}{m_A+m_B} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$



Chapitre 3 : Fonctions d'une variable

Heyy petit biz ! J'espère que ton arrivée à l'insa s'est bien passée, que t'as kiffé un max ton inté et que t'as trouvé une miff avec laquelle tu vas vibrer le reste de l'année. Si tu viens lire ces lignes c'est que ton IE d'omsi approche. Rassure-toi, ce chapitre n'est pas le plus compliqué, si tu comprends bien la méthode tu pourras faire les exercices sans problème.

Pour que j'en arrive à écrire ces annales il s'en est passé des choses. A commencer par une incroyable liste de cowboys bien deter à tout casser, une filière de fou, j'ai nommé les SCAN (on vous voit les amer mais vous pouvez pas vous mesurer à nous), des soirées de qualité en 305, bref de quoi rêver !

Bon courage pour ton année, tu vas gérer j'en suis sûre :)

Leeloo (Dalton un peu trop p'tit)

COURS

1. Dérivée, différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Alors cette première partie c'est de la théorie que t'as déjà dû voir en maths donc c'est plutôt tranquille.

1) Continuité des fonctions

On dit que f est continue en un point x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dit que f est de classe C^0 sur I, c'est-à-dire continue, si elle est continue en chaque point de I.

2) Dérivée de f en un point x_0

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

3) Différentielle de f en x_0

On note la différentielle de f en x_0 df_{x_0}.

La différentielle de f, une fonction de variable x sera : $df_{x_0} = f'(x_0)dx$

Tu dois ajouter le dx pour montrer que tu as dérivé selon x, tu verras après quand il y aura plusieurs variables, c'est important.

4) Opération algébrique et composition, différentielle logarithmique

Les différentielles ont des règles de calcul mais tranquille, c'est comme les dérivées :

$d(f+g) = df + dg, \qquad d(kf) = kdf, \qquad d(fg) = fdg + gdf, \qquad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2},$

$$(gof)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

La différentielle logarithmique :

$$d(\ln|f|) = \frac{df}{f}$$

Ce type de différentielle va beaucoup te servir dans tout ce qui est calcul d'incertitudes. En effet, de cette formule tu peux en déduire :

$$\frac{dfg}{fg} = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g} \qquad \frac{d(f/g)}{f/g} = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g} \qquad \frac{df^n}{f^n} = n\frac{df}{f}$$

Je te fais un petit exemple d'application pour t'aider à déterminer tes incertitudes en TD.

Prenons par exemple la fonction $L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C}$ (C'est une formule d'élec)

- 1ère étape : tu appliques le logarithme népérien à gauche et à droite

$$\ln(L) = \ln\left(\frac{1}{4\pi^2 f^2 C}\right)$$

- 2ème étape : tu réduis l'expression (les formules utilisées sont les propriétés du logarithme)

$$\ln(L) = -\ln(4\pi^2) - \ln(f^2) - \ln(C)$$
$$\Leftrightarrow \ln(L) = -\ln(4\pi^2) - 2\ln(f) - \ln(C)$$

- 3ème étape : tu appliques la différentielle logarithmique (quand c'est une constante, comme $4\pi^2$, c'est 0)

$$\frac{dL}{L} = 0 - 2\frac{df}{f} - \frac{dC}{C}$$

- 4ème étape : tu passes de d à Δ (c'est-à-dire en valeur absolue)

$$\frac{\Delta L}{L} = 2\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta C}{C}$$

Voilà tu obtiens la formule d'incertitude de L (les incertitudes sur f et C sont à déterminer en TP en fonction de tes mesures et seront données en exercices)

2. Dérivée et différentielle d'une fonction vectorielle

Une fonction vectorielle c'est une fonction du type :

$$\vec{F}(t) = f(t)\overrightarrow{e_x} + g(t)\overrightarrow{e_y} + h(t)\overrightarrow{e_z}$$

Pour des vecteurs constants (cf. chapitre 5 : les systèmes de coordonnées) on a ainsi :

$$\vec{F}(t_0) = f'(t_0)\overrightarrow{e_x} + g'(t_0)\overrightarrow{e_y} + h'(t_0)\overrightarrow{e_z}$$

Attention, cette formule ne fonctionne qu'en coordonnées cartésiennes.

EXERCICE

Exercice 1 :

Ce type d'exercice tu le reverras au chapitre 4 mais je te le mets quand même pour t'exercer.
Calculer l'incertitude de ΔC_A à partir de la formule $C_A * V_A = C_B * V_E$

CORRIGE

D'abord on isole C_A : $C_A = \frac{C_B * V_E}{V_A}$
On applique ensuite le logarithme $\ln(C_A) = \ln\left(\frac{C_B * V_E}{V_A}\right)$

$$\Leftrightarrow \ln(C_A) = \ln(C_B) + \ln(V_E) - \ln(V_A)$$

On passe à la différentielle logarithmique :

$$\Leftrightarrow \frac{dC_A}{C_A} = \frac{dC_B}{C_B} + \frac{dV_E}{V_E} - \frac{dV_A}{V_A}$$

Enfin on passe en valeur absolue avec Δ :

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta C_A}{C_A} = \frac{\Delta C_B}{C_B} + \frac{\Delta V_E}{V_E} + \frac{\Delta V_A}{V_A}$$

On isole C_A :

$$\Leftrightarrow \Delta C_A = C_A\left(\frac{\Delta C_B}{C_B} + \frac{\Delta V_E}{V_E} + \frac{\Delta V_A}{V_A}\right)$$

Chapitre 4 : Fonctions de plusieurs variables

Salut jeune bizut :)

Bon l'OMSI, c'est pas simple mais la bonne nouvelle c'est que les exercices sont plus ou moins toujours les mêmes donc si tu ne t'y mets pas à la dernière minute et que tu révises bien avec un peu de chance tu finiras pas à l'IUT...

Maintenant les dédicaces (ENFIN!), merci aux meilleurs cdp, les cdpiciers, pour tous nos after guitare, pour le ski, pour la campagne, tous les beaux moments, à la team chapoon (la meilleure) et à Joris parce qu'**insaloon** c'est ma liste, insaloon c'est ta liste, insaloon c'est Joris.

Un gros big up aux **merens**, je vous adoooore. A nos meilleurs repas, bien meilleurs que la farine à l'eau de Naïs qu'on taira comme la photo de Ninon. On minore peut-être les IE, à part Norah, mais on majore le flow comme Lisa et c'est ça la vie d'artiste (big up à notre artiste pref Titouan). Quand tu vois Jean et Simon tu sais que ça va sortir des dingueries, dingue comme Manue et Laura et leur flow latino. Toujours les meilleurs en soirées, avec Baptiste qui majore le coin-coin, Enzo le plus beau, Clémence, Marie nos soleils, notre TN fav aka Léon, Alex toujours bien accompagnée, Ralph, sa guitare et son talent presque aussi divin qu'Hania. Bonne chance à hyahya pour gérer tout ça...

Un autre énorme big up à la famille qui m'a présenté l'INSA les **SDA** (et à ma cobiz zda) <3

Merci à la meilleure filière, la **SCAN** évidemment #scanonymous #lateamapéro #larangéedeCM #afterpâtechezviolaine **#63**#JeremWillyLariRrrrokus #lalignéeSCAN #VictorNourjevousaime #cestpasdesscansmais #teamtoutschuss #niquetarace

Enfin big up à la lignée traquenard, notamment au meilleur des parrains Massin et à mes futurs bizs parce que je suis sûre que vous serez les plus cool !

Pour finir grosse dédicace à ma future colloc (non je t'ai pas oublié), toujours là pour enchaîner BMC et grosses soirées et la meilleure quand il s'agit de danser : **Ghita**.

<3 sur toi

Jeannoon aka le cactus

1. Calculs de différentielles

Dans ce chapitre on considère des fonctions à plusieurs variables.

Soit $f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y;z) \mapsto f(x;y;z) \end{cases}$

Exemple : $f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y;z) \mapsto x+y-z \end{cases}$

On a alors $f(1;3;2) = 1+3-2 = 2$ ou $f(3;5;-2) = 3+5-(-2) = 10$

1) Dérivées partielles

Il s'agit de la dérivée de f par rapport à une seule variable. En pratique pour déterminer une dérivée partielle, il te suffit de considérer toutes les autres variables comme des constantes puis d'appliquer les formules de dérivées que tu connais.
On la note de cette manière :

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ (la dérivée partielle de f par rapport à x)
$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$ (la dérivée partielle de f par rapport à y)
$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$ (la dérivée partielle de f par rapport à z)
Le symbole ∂ se lit « d rond » et $\frac{\partial f}{\partial x}$ se lit « d rond f sur dx »

2) Différentielle d'une fonction

Bon normalement, si tu as bien compris la définition précédente, ça devrait aller tout seul. En gros, la différentielle d'une fonction à plusieurs variables, c'est la somme des dérivées partielles par rapport à chacune des variables multipliées par les petites variations de ces variables.

On note df la différentielle de la fonction f qui s'exprime donc comme ça :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Ici dx , dy et dz sont respectivement les petites variations selon x, y et z.

En général : $d(truc) = \text{petite variation de truc}$

3) Propriétés des différentielles

Soit f et g deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $d(\lambda f) = \lambda df$
- $d(f + g) = df + dg$
- $d(fg) = fdg + gdf$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$
- $d\big(f(g)\big) = fdfdg$

Ces propriétés sont démontrables facilement avec les dérivées partielles mais ç'est quand même pratique de les connaître.

Démonstration de la 3ème propriété :

$$d(fg) = \frac{\partial(fg)}{\partial x}dx + \frac{\partial(fg)}{\partial y}dy + \frac{\partial(fg)}{\partial z}dz$$
$$= \left(\frac{\partial(f)}{\partial x}g + f\frac{\partial(g)}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial(f)}{\partial x}g + f\frac{\partial(g)}{\partial x}\right)dy + \left(\frac{\partial(f)}{\partial x}g + f\frac{\partial(g)}{\partial x}\right)dz$$
$$= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$$
$$= fdg + gdf$$

PS : Tu peux t'entrainer à démontrer les autres propriétés.

4) Méthode de la différentielle logarithmique

Dans les cas où la fonction demande pas mal de calculs pour la dériver, cette méthode peut permettre de limiter les calculs. Tu verras, c'est plutôt utile en TP de chimie.
La seule formule à savoir pour cette méthode est :

$$\frac{df}{f} = d(\ln(|f|))$$

Rien de plus à savoir donc on va partir un exemple d'application :

On prend par exemple : $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{xz}}{x+y} = \frac{(xz)^{\frac{1}{2}}}{x+Y}$

Etape 1 : Tu appliques la fonction logarithme à f :

$$\ln(f) = \ln(xz)^{\frac{1}{2}} - \ln(x + y) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(z) - \ln\,(x + y)$$

Etape 2 : Tu différencies l'expression :

$$d\ln(f) = \frac{df}{f} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\frac{dz}{z} - \frac{d(x + y)}{x + y}$$

$$= \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x}\right)dx + \frac{1}{x+y}dy + \frac{1}{2z}dz \quad \text{car} \quad d(x+y) = dx + dy$$

Finalement tu as :

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x}\right)dx + \frac{1}{x+y}dy + \frac{1}{2z}dz$$

<u>Remarque :</u>
Pour obtenir l'incertitude relative (très utile en chimie), tu passes tout ce qu'il y a devant les dx, dy et dz en valeur absolue. Puis tu notes tes dx, dy et dz : Δx, Δy et Δz
Ce qui donne dans notre cas :

$$\frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x}\right|\Delta x + \left|\frac{1}{x+y}\right|\Delta y + \left|\frac{1}{2z}\right|\Delta z$$

2. Formes différentielles

1) Conditions pour avoir une forme différentielle exacte

Une forme différentielle ω définie sur U s'écrit :
$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ (où P, Q et R sont des fonctions de x, y et z)

Si P, Q et R sont de classe C^k sur U alors ω est dite de classe C^k.

Une forme différentielle ω de classe C^1 sur U est **exacte si et seulement si** les conditions de fermeture sont respectées, c'est-à-dire que :

- En tout point (x, y, z)de U on a : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$

  (ça parait compliqué comme ça mais c'est juste des dérivées croisées. Pour le retrouver facilement, pour la première ligne tu transformes de $Pdx + Qdy$ à $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Et tu as 3 lignes parce qu'il y a 3 couples possibles (P et Q, P et R, Q et R))
- U est simplement connexe c'est-à-dire en un seul morceau / sans trous
  (ce sera toujours le cas dans les exos t'inquiètes donc dis le juste à chaque fois)

Si ces conditions sont vérifiées alors il existe une fonction f telle que $\omega = df(x, y, z)$ et P, Q et R sont respectivement les dérivées partielles de f par rapport à x, y et z.

2) Comment déterminer f telle que ω=df par intégrations successives

On cherche f telle que $df = Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$.

1) On a par identification $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x; y; z)$.
   On intègre selon x : $f(x, y, z) = \int P(x; y; z)dx + g(y, z)$
2) On dérive f selon y et on identifie avec Q : $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = \frac{\partial(\int Pdx)}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}$
   Ainsi on détermine $\frac{\partial g}{\partial y}$ = truc et donc en intégrant en y :
   $g(y, z) = \int truc\ dy + h(z)$ et $f(x, y, z) = machin + h(z)$
   où machin = $\int P(x)dx + \int truc\ dy$
3) De même, on trouve h en dérivant notre expression en z et en identifiant avec R. Une fois qu'on connait h, on peut déterminer f.

Alors oui ça parait compliqué comme ça mais en pratique les fonctions sont plutôt simples. Avec un exemple concret c'est toujours mieux donc tu peux aller voir l'exercice 2 qui est corrigé.

Remarque : Si ce n'est pas précisé dans l'énoncé, c'est mieux de vérifier que la forme différentielle proposée est bien exacte avant de se lancer dans ces calculs assez long.

EXERCICES

Exercice 1 :

Déterminez les dérivées partielles puis la différentielle de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = y^2e^x + 2xy - x \text{ avec } (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 2 :

Soit $\omega = \left(y + \frac{2xz}{x^2+1}\right)dx + (x + 2yz)dy + (\ln((x^2 + 1) + y^2\ ))dz$ une forme différentielle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer que ω est exacte puis déterminer la function f telle que $\omega = df$.

CORRIGE

Exercice 1 :

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^x + 2y - 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x + 2x$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y^2 e^x + 2y - 1)dx + (2ye^x + 2x)dy$

Exercice 2 :

1. $\omega = \left(y + \frac{2xz}{x^2+1}\right) dx + (x + 2yz)dy + \ln((x^2 + 1) + y^2 \;) \,dz$

   On a par identification $\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2\frac{xz}{x^2+1}$. On intègre selon x :

   $f(x, y, z) = \; xy \; + \; z \ln|x^2 + 1| + g(y, z).$

   $\qquad = xy + z \ln(x^2 + 1) + g(y, z)$ car $x^2 + 1 > 0$

2. On dérive f selon y et on identifie avec Q :

   On a d'une part $\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y}$ et d'autre part $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2yz.$

   Ainsi $\frac{\partial g}{\partial y} = 2yz$ et donc en intégrant en y :

   $g(y, z) = y^2 z + h(z)$ et $f(x, y, z) = xy + z \ln(x^2 + 1) + y^2 z + h(z).$

3. On dérive f selon z et on identifie avec R :

   $\frac{\partial f}{\partial z} = \ln(x^2 + 1) + y^2 + \frac{dh}{dz}$

   On obtient $\frac{dh}{dz} = 0$ et donc $h(z) = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

CONCLUSION : les fonctions f telles que $df \; = \; \omega$ sont donc de la forme :

$$f(x, y, z) = xy + zln(x^2 + 1) + y^2 z + \lambda \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

C'est un peu long et ça fait peur mais c'est toujours la même chose !

Bon courage pour les révisions ! :)

Chapitre 5 : Courbes et Surfaces, Systèmes de coordonnées

Bon si t'es là c'est que c'est sûrement tendu pour tes révisions d'OMSI mais t'inquiètes pas je suis là pour ça. Tu devrais réussir à pas trop mal t'en sortir à l'IE rien qu'en lisant ce que je t'ai préparé. Dans tous les cas c'est sûr que tu vas dead ça sinon, au pire, tu rattraperas ça aux partiels (ou pas… (ça sent le vécu mdr)). Bref bon courage à toi, bisous.

s/o aux TotalisteSpies mes gars sûrs, aux Tijs et à mes frérots du groupe 15. <3

- Rémi aka Jerry aka @musicbyshake sur insta abonnez-vous

COURS

---

1. Rappels : représentations paramétriques

• Représentation paramétrique d'une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ et passant par le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\Delta : \begin{cases} x(t) = \alpha + \alpha t \\ y\,(t) = \beta + bt \\ z(t) = \gamma + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

• Représentation paramétrique d'un plan de repère $(M, \vec{a}, \vec{b})$, avec $M(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)\ et\ \vec{b}(b_x, b_y, b_z)$:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \alpha_x u + b_x v \\ y(t) = \beta + a_y u + b_y v \\ z(t) = y + a_z u + b_z v \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

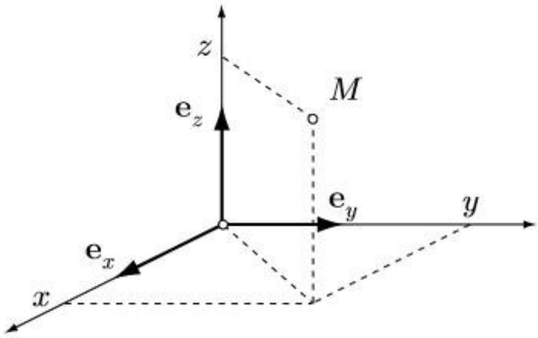
2. Systèmes de coordonnées

Il y a 4 systèmes de coordonnées qu'il faut maitriser. Dans la suite, on va considérer un système mobile M.

1) Les coordonnées cartésiennes

En principe, celui-là tu le connais ! Dans l'espace tout point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans un repère fixe orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Dans ce repère, les trois vecteurs unitaires ont la même norme, sont orthogonaux et leur norme, leur direction et leur sens constants, on dit qu'ils ne varient pas. On définit le point M par :

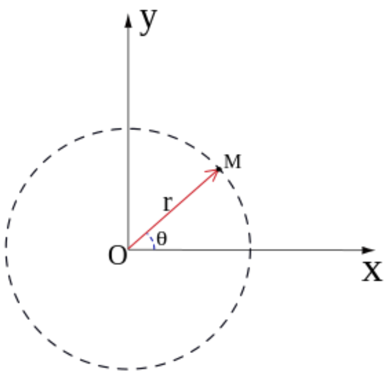
$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$



2) Les coordonnées polaires

Ce système permet de repérer un point dans un plan (en 2 dimensions). On l'utilise en général pour un point M décrivant un mouvement circulaire dans le plan. On peut définir le point M grâce à la distance $r = \| \overrightarrow{OM} \|$ et l'angle : $\theta = (\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OM}})$. Dans ce repère, le point M de coordonnées (r, θ) est défini par :

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\ \overrightarrow{e_y}$$

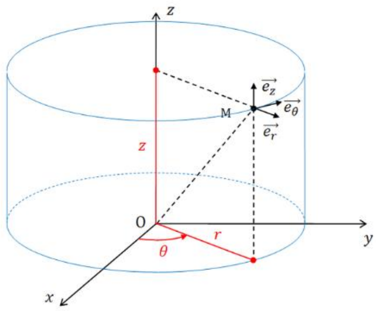


3) Les coordonnées cylindriques

Les deux repères précédents sont un peu limités pour l'étude de certains mouvements, notamment les mouvements de rotation dans l'espace.

Les coordonnées cylindriques c'est un peu les coordonnées polaires mais en trois dimensions. Les deux premières coordonnées sont les mêmes, mais on en ajoute une troisième qui correspond à la hauteur du point M par rapport à l'origine. Le point M de coordonnées (r, θ, z) est défini par :

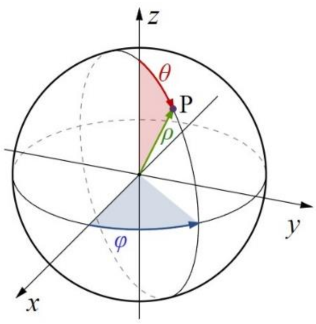
$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_x}$$



4) Les coordonnées sphériques

Dans ce système, le point M est défini par la distance $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$, et par les angles : $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OM}})$ et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM}})$. M a pour coordonnées (r, θ, φ) et on note :

$$\overrightarrow{OM} = r\ \sin\quad \theta\ \cos\quad \varphi\, \overrightarrow{e_x} + r\ \sin\quad \theta\ \sin\quad \varphi\, \overrightarrow{e_y} + r\ \cos\quad \theta\, \overrightarrow{e_z}$$



Il faut vraiment faire attention aux variables utilisées dans le système de coordonnées dans lequel on se situe : par exemple l'angle θ ne correspond pas au même angle dans les systèmes sphériques et polaires. C'est pas malin mais c'est ainsi…

3. Passer d'un système à un autre

Il te sera souvent nécessaire de passer d'un repère à un autre pour adapter la situation aux différents paramètres. Il faut donc que tu saches passer efficacement d'un repère à un autre. Pour t'aider, voici un petit tableau, mais il est surtout important que tu saches retrouver ces formules par des schémas.

De coordonnées cartésiennes (x, y, z) *vers…*	
Coordonnées polaires Si le repère cartésien est à 2 dimensions (x, y)	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan \frac{y}{x}$
Coordonnées cylindriques	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ $z = z$

Coordonnées sphériques	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ $\theta = \arccos \frac{z}{r}$
De coordonnées polaires (r, θ) *vers…*	
Coordonnées cartésiennes Si le repère cartésien est à 2 dimensions (x, y)	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$
De coordonnées cylindriques (r, θ, z) *vers…*	
Coordonnées cartésiennes Si le repère cartésien est à 3 dimensions (x, y, z)	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$
Coordonnées sphériques	$r_{sphérique} = \sqrt{r^2{}_{cylindrique} + z^2}$ $\varphi = \theta_{cylindrique}$ $\theta_{sphérique} = \arctan \frac{r_{cylindrique} \times \sin \theta_{cylindrique}}{2}$
De coordonnées cylindriques $(r, \theta$*,z) vers…*	
Coordonnées cartésiennes Si le repère cartésien est à 3 dimensions (x, y, z)	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
Coordonnées cylindriques	$r_{cylindrique} = \sqrt{r^2_{sphérique} - z^2}$ $z = r \cos \varphi$

4. Repères locaux associés

Un repère local associé à un système de coordonnées est défini comme étant le repère d'origine le point M. Tu peux donc poser des repères cartésiens, polaires, cylindriques ou sphériques.

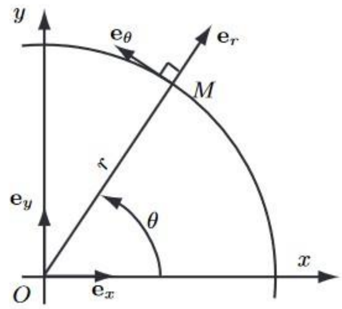
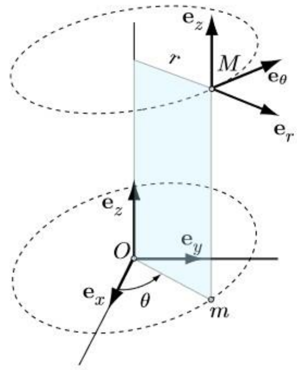
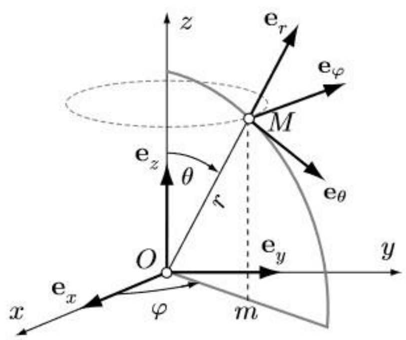
On utilise généralement le repère polaire pour étudier un mouvement de rotation dans un plan, le repère local cylindrique pour étudier des mouvements de rotation avec des changements d'altitude et le repère sphérique pour étudier les mouvements sphériques.

Les vecteurs positions s'expriment différemment dans les repères locaux.

Pour retrouver l'expression des vecteurs unitaires en fonction des vecteurs de la base fixe $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on utilise la formule suivante :

$$\overrightarrow{e_\Omega} = \frac{\partial \overrightarrow{OM} / \partial \Omega}{\left\| \partial \overrightarrow{OM} / \partial \Omega \right\|} \text{ avec } \Omega \text{ qui représente les différentes variables } (r, \theta, \varphi, z)$$

Pour te faciliter les choses, voici un tableau qui te récapitule l'expression des différents vecteurs unitaires pour chaque repère ainsi que l'expression du vecteur position.

Repère local polaire	
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ **Vecteurs unitaires :** $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$ $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$	
Repère local cylindrique	
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$ **Vecteurs unitaires :** $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}$ $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$ $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_z}$	
Repère local sphérique	
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$ **Vecteurs unitaires :** $\overrightarrow{e_r} = \sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z}$ $\overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_z}$ $\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_y}$	

ATTENTION : lorsque tu étudies un mouvement dans un repère local, les vecteurs unitaires ne sont pas fixes.

Ceci implique notamment que lorsque tu étudies le mouvement d'un solide en physique par exemple, tu vas avoir besoin de déterminer sa vitesse et son accélération. Il ne suffira pas alors de dériver les composantes du vecteur mais aussi les vecteurs eux-mêmes (car ils ne sont pas fixes).

Dans la base polaire ou cylindrique les dérivées des vecteurs unitaires sont :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta} = \dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \theta} = -\dot{\theta}\, \overrightarrow{e_r}$$

Dans la base sphérique, la dérivée du vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \sin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

Rappel : $\dot{\theta}$ se lit « thêta point » et est la dérivée de θ par rapport au temps ($= \frac{\partial \theta}{\partial t}$)

EXERCICE

Exercice 1 :

Sur le Campus de la Doua, on assimile le point O à la K-fêt. Dans le repère $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on repère la Pokeball par le point A.

Le point A est défini en fonction du paramètre t représentant le temps par : $\{x = a(t)\cos(\omega t)\,; y = a(t)\sin(\omega t)\,; z = (t)\}$, avec a et ω des constantes positives.

1) Exprimer les coordonnées cylindriques du point A en fonction de t.

2) Exprimer le vecteur OA dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et dans la base locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ en fonction de a, t et ω.

3) Même question pour le vecteur vitesse du point A.

4) Même question pour le vecteur accélération du point A.

CORRIGE

Exercice 1 :

1) On a : $x = r\cos(\theta)$ et $y = \ r\sin(\theta)$.
Donc on peut associer ici $r = a(t)$ et $\theta = \omega t$.
En effet, si tu appliques la formule $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ pour retrouver r et par correspondance pour retrouver θ,

$$A\ (a(t);\ \omega t\ ; a(t))$$

2) Dans la base $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = a(t)\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x} + a(t)\sin(\omega t)\overrightarrow{e_y} + a(t)\overrightarrow{e_z}$$

Dans la base cylindrique on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

3) Dans la base $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$, on a $\overrightarrow{e_z}$ fixe donc de dérivée nulle.

$$v = (\mathrm{a}\cos(\omega t) - a(t)\sin\,(\omega t))\overrightarrow{e_x} - (\mathrm{a}\sin(\omega t) + a(t)\omega\cos(\omega t))\overrightarrow{e_y} + a\overrightarrow{e_z}$$

Et dans la base locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ on a :

$$V = a\overrightarrow{e_r} + a(t)\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + a\overrightarrow{e_z}$$

4) Dans la base $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ on a :

$$a = (-2a\omega\cos(\omega t) - a(t)\omega 2\cos(\omega t))\,\overrightarrow{e_x} + (2a\omega\cos(\omega t) - a(t)\omega\sin(t))\overrightarrow{e_y}$$

Et dans la base locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ on a :

$$a = 2a\omega\overrightarrow{e_\theta} - a(t)\omega 2\overrightarrow{e_r}$$

Chapitre 6 : Intégrales Multiples

Ok mon petit dresseur, je suppose qu'il est environ 23h un jeudi et que l'IE est demain, pas de panique, les intégrales doubles ça fait peur mais avec de la pratique pas besoin de Pokémon calculator !

Maintenant les dédicaces : dédicace à personne, je me suis fait tout seul, fallait être là. Non je rigole, gros big up à mon coturne, ce génie des maths qui m'a sauvé la vie cette année un nombre de fois genre plus que e^{133}, merci Antho pour tous ces qcm faits à 23h le Dimanche soir, t'es un frère.

Coeur sur le G16, même si j'ai toujours envie de brûler Scott. Arthur et Peter les sauces, Hugo, Julie, Chloé, Antho, Martin et j'en oublie.

Big up au groupe 6 en anglais, on était tlm éclatés contre un mur, le prof nous laissait faire nimp, pensée à Arthur et Kentin pour cet exposé mémorable en slip où on avait mis le feu à la maquette et que le prof avait filmé. Lunaire.

La 505 aka la boîte de l'INSA chez le Hip et l'hongrois dsl au 5ème étage qui ne dort pas avant 4h le vendredi soir. Les bonz, l'AS grimpe, le parrain, Cailloux, Hamzob, Luc, la 142,la 423, Bapt, Tom, Lise la daronne, le V, Tanguy mon reuf à toutes ces turnes déménagées, à Gachette qui avait perdu son lit, à l'oeuf contre mon mûr, et à toutes les dingz de cette année.

LE MEILLEUR POUR LA FIN : La Resc, meilleure liste les plus beaux, les plus funs, les plus chauds, bêtes de souvenirs soirées turne, peinture un vendredi soir jusqu'à 23h, carton dans les couloirs, tournage en vago à se faire arrêter par la sécu et découverte des résultats. INS'A la rescousse t'appelle qui !!? Je vous aime les reufs <3<3<3<3).

Et une ligne pour mes futurs biz les plus bg de l'INSA, je suis déjà sûr que vous êtes des cracks. Et goutez jamais au pétrole du V important prévenez ses biz.

Bisous.

Charles

COURS

Alors les intégrales doubles et triples, ça va te servir à plein de choses : calculer des aires, des volumes, des moments d'inerties ou même les caractéristiques d'un champ de vecteurs. En plus, comme tu as dû le remarquer, l'OMSI ça sert même en physique et en thermo alors accroche toi bien !

1. <u>Intégrales doubles</u>

1) Définition

L'intégrale double, c'est le même principe que les intégrales simples que tu as déjà vues mais en travaillant cette fois avec des fonctions de plusieurs variables ! Tu vas intégrer une fonction sur un domaine D ($\iint_D f(S)dS$), qui se situe dans le plan. Pour ce faire, on va découper notre domaine en aires infinitésimales (les fameuses dS).

L'objectif va être de **d'obtenir deux intégrales simples successives**, puis de les intégrer dans le bon sens.

L'essentiel de la difficulté de ce chapitre est de définir à chaque début d'exercice ton domaine D, et les bornes de tes deux intégrales simples. **Le schéma est donc indispensable** pour ne pas se perdre. Pour définir ce domaine D, ton boulot sera souvent de le caractériser en fonction de 2 variables : (x, y) ou (r, θ), en fonction du **système de coordonnées le plus adapté.**

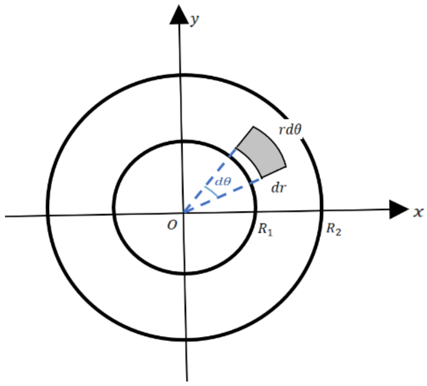
2) Calcul d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine, il te suffit de sommer les petits dS sur ton domaine entier (ta fonction vaut alors $f(x, y, z) = 1$) :

$$\iint_D dS \quad \text{avec en cartésien: } \boldsymbol{dS = dx \times dy} \quad et\ en\ polaire: \boldsymbol{dS = dr \times rd}\Theta$$

Place à l'entrainement. Dans ce premier cas, rien de compliqué, toutes les coordonnées sont indépendantes et varient entre 2 constantes, du coup même pas besoin de se préoccuper de l'ordre d'intégration :

Exemple 1 : calcule l'aire du disque de ton chanteur préféré de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2.



Comme on a un cercle, le plus simple est d'utiliser les coordonnées polaires (à part si tu aimes te compliquer la vie avec les changements de variables et l'équation d'un cercle qui je le rappelle est $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ avec le centre $O(\alpha, \beta)$ et R le rayon.

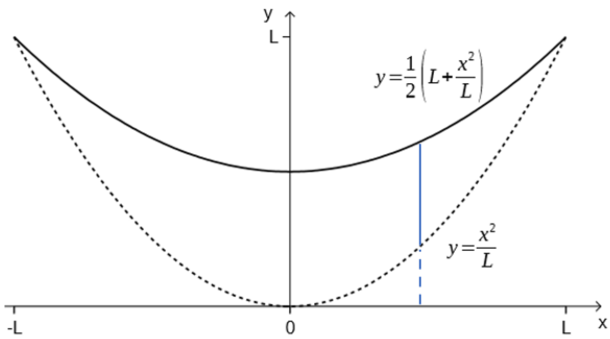
La petite aire grisée correspond donc à $dS = rdrd\Theta$.

θ varie entre 0 et 2π et R entre R_1 et R_2 ainsi l'aire vaut donc :

$$A = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} d\theta \times rdr = 2\pi * \int_{R_1}^{R_2} rdr = \pi \times ({R_2}^2 - {R_1}^2)$$

Mais le plus souvent, tes variables dépendront les unes des autres. Il te faudra donc en exprimer une en fonction de l'autre et pour cela, tu te demandes : "si x est fixée, comment varie y ?" et vice versa. Il y a cette fois un ordre d'intégration : tu dois d'abord intégrer selon la variable que tu as exprimée en fonction de l'autre (ce sera la borne « intérieure » de ton intégrale) puis selon celle que tu as fixée (borne « extérieure »). Plus qu'à appliquer ça sur ce 2e exemple :

Exemple 2 : que vaut l'aire de la surface S représentée ci-contre ?



Primo : caractérise ton domaine. Ici, il sera plus simple d'exprimer ta variable y en fonction de x, puisqu'on te donne directement les équations des courbes délimitant ton domaine. Pour un x fixé avec $x \in [-L; +L]$, ton y varie entre $\frac{x^2}{L}$ et $\frac{1}{2}(L + \frac{x^2}{L})$.

L'intégrale se ramène à : $A = \int_{-L}^{L} (\int_{\frac{x^2}{L}}^{\frac{1}{2}(L+\frac{x^2}{L})} dy)dx = moultes\ calculs\ que\ tu\ maîtrises$

réponse pour les plus curieux : $A = \frac{2L^2}{3}$

Astuce de dresseur avéré : Tu peux éventuellement décomposer ton domaine en plusieurs sous-domaines, pour faciliter tes calculs d'intégrales. Ici, vu la symétrie de ta surface, tu aurais pu calculer l'aire de la moitié de ton domaine (x variant alors de 0 à $+L$) puis multiplier par 2 pour obtenir l'aire totale.

Peu importe la manière dont tu t'y prends pour exprimer ton domaine : que tu fixes d'abord x ou y (ou r ou z ou θ ou ...), tu es censé retrouver le même résultat à la fin, c'est ce que te dit le théorème de Fubini !

2. Intégrales Triples

1) Définition

Même principe, mais cette fois-ci, tu travailles dans un espace à trois dimensions. Au niveau du calcul, on intègre cette fois des $f(V)dV$. Elles te permettront entre autres de calculer des aires ou des volumes de solides de révolution. Encore une fois, tu vas pouvoir te ramener à plusieurs intégrales simples successives. Mais pour ça, tu devras toujours veiller à bien définir ton domaine et tes bornes d'intégration ! (Il existe toujours plusieurs manières de calculer une intégrale triple.)

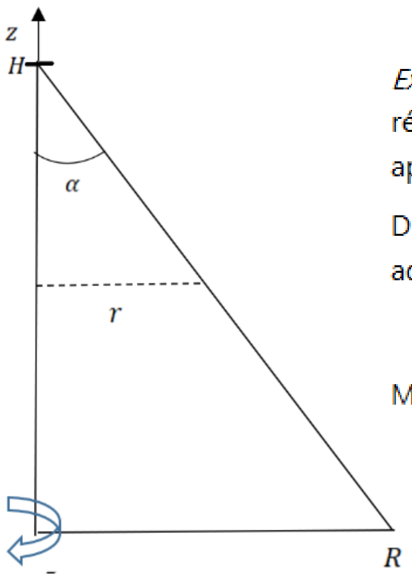
2) Calcul de volume

De la même manière que pour les dS, on définit le volume élémentaire dV

- **Cartésien :** $dV = dx \times dy \times dz$
- **Cylindrique :** $dV = dr \times rd\theta \times dz$
- **Sphérique :** $dV = dr \times rd\theta \times rsin(\theta)d\varphi$

Pour calculer le volume d'un domaine, il te suffit de sommer les petits dV sur ton domaine entier : $\iiint_D \ dV$

On est bon pour un exemple et après ça, tu seras un pro des intégrales en tout genre :



Exemple 3 : Calculer le volume d'un cône d'axe de révolution (Oz), de hauteur H et de rayon de base R. On appelle α son demi-angle d'ouverture.

D'abord, on choisit le système de coordonnées le plus adapté : ici, on opte bien sûr pour le repère cylindrique.

Maintenant caractérisons notre solide :

θ varie entre 0 et 2π et z varie entre 0 et H. Quant à r, il dépend de la hauteur z à laquelle on se situe selon $r = \frac{R(H-z)}{H}$ (comme d'hab Thalès est ton meilleur ami). Tu aurais aussi pu exprimer z en fonction de r.

On a donc : $D = \left\{(r, \theta, z) \in R_3 | 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq H; 0 \leq r \leq \frac{R(H-z)}{H}\right\}$
D'où :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{\frac{R(H-z)}{H}} r dr dz d\theta = 2\pi \times \int_0^H \frac{R^2(H-z)^2}{2H^2} dz = 2\pi * \frac{R^2}{6H^2} = \frac{\pi R^2}{3H^2}$$

Dernière chose : tu seras parfois amené à effectuer des **changements de variable** lors de tes aventures d'intégrales. Dans ce cas retiens bien ces **trois** choses importantes : il te faut une ou des nouvelles **variables** (qui remplace x par exemple), des nouveaux **incréments** (dx, ...) et des nouvelles **bornes**.

EXERCICE

Calcule l'intégrale triple suivante : (bien corsé je sais, pense aux changements de variables)

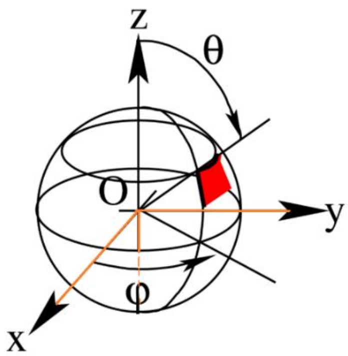
$$I = \iiint_\Delta \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$$

$avec$ $\Delta = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$

INDICE : pense à un morceau de pokéball !!!

CORRIGE

On va passer en coordonnées sphériques. Pour cela, j'espère que tu connais bien tes formules et que tu sais que $x = rsin\theta cos\varphi$ et que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (ou alors que tu es un talentueux dresseur et que tu peux le retrouver direct grâce à une attaque schéma d'un pokemon feu).



On doit maintenant mettre à jour les bornes de notre intégrale (encore une fois aide-toi de ton schéma !) :

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \ (car\ z \leq 0);\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\ (car\ x\ et\ y \geq 0)$$

$$et\quad 1 \leq r \leq \sqrt{2}\ (car\ 1 \leq r^2 \leq 2)$$

On n'oublie pas non plus de « convertir » l'incrément $dx\,dy\,dz$ par $r^2\,d\theta\ sin\theta d\varphi dr$

On remplace tout ça dans notre intégrale et on obtient alors :

$$I = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\int_{r=1}^{\sqrt{2}} \frac{rsin\theta cos\varphi}{r} r^2\,dr)\ sin\theta d\theta) d\varphi$$

Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\varphi d\varphi \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin^2\theta d\theta \times \int_1^{\sqrt{2}} r^2\,dr = [sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{2} * [\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \times [\frac{r^3}{3}]_1^{\sqrt{2}}$$

(pour intégrer le $sin^2\theta$, tu peux utiliser la formule : $sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$).

Finalement, on obtient :

$$I = \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}48$$

Chapitre 7 : Les champs

Salut à toi jeune bizuth,

La fin de l'année arrive, c'est la dernière ligne droite, et pour conclure tout ça tu as une petite IE d'OMSI. On va essayer de t'aider au mieux pour comprendre ce chapitre pour que tu nous finisses cette année en beauté, et prochaine étape ton inté de deuxième année !

Maintenant place aux dédicaces !

D'abord, gros Big Up aux AI, la meilleur mif qui m'a fait passer une inté de folie, mais aussi à ma lignée de qualité avec ma marraine Juliette et ma cobiz Marion (à nos repas en p'tit comité ahaa).
Des gros bisous au groupe 3 (et spécialement à #LagrossesaucedeFrance), la meilleur classe j'vous aime mais aussi au bg de la 128 Mr Rafig (#ménagec'estpostpartiels).
Et enfin grosse dédicace aux meilleurs médecins de l'INSA, les INSANESTHESISTES !
La bise à mes futurs biz.

Thomas

Un big up au groupe 5 et à ses gentelmens bridgeurs, qui ont réussi à plier la 1A. Gros bisous à Maxence mon parrain, et à tous les AI qui m'ont fait passer la meilleure inté !
Dédi à l'équipe 5 de foot de l'INSA #laGrinta
Pour finir Grosse dédicace à la meilleure liste de tous les temps, j'ai nommé les Totalistespies !! (Non c'est les insanesthésistes) J'ai adoré passer la semaine en collant, Je vous aime #cottedemaillle. A Illies qui a les plus belles fesses du FIMI (he merce basic fit) et ismail le chien soin.

Pierre

COURS

1. Définitions

1) Champ scalaire

On appelle champ scalaire une fonction d'une ou plusieurs variables qui associe un seul nombre (d'où le nom de scalaire) à chaque point de l'espace ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$). Le point et sa valeur sont dans le même espace. Exemple : La température, pression, champ gravitationnelle, etc....

On note $f(M) = f(x, y, z)$

Un **isoscalaire** de valeur constante k est l'ensemble des points qui ont la même valeur k. C'est-à-dire tous les points d'équation $f(M) = k$. On le nomme **courbe de niveau** (dans un plan), ou **surface de niveau** (dans l'espace).

Exemple : La température, pression, champ gravitationnel, etc... Sur une carte topographique, les lignes qui représentent une même hauteur sont des courbes de niveau.

2) Champ de Vecteur

Un champ de vecteur ou champ vectoriel est une fonction qui associe un vecteur à chaque point de l'espace.

Une **ligne de champ** est une courbe tangente à chacun des points M du champ.

Il est utile de rappeler que la ligne de champ est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{dOM}$, qui est tangent à $\vec{V}(M)$. Cela nous donne $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) = \vec{0}$.

Exemple : Considérons le champ vectoriel $\vec{V}(M) = -y\overrightarrow{ex} + x\overrightarrow{ey}$
Le produit vectoriel nul nous donne l'équation :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) = \vec{0} \Leftrightarrow x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = constante$$

Les lignes de champ sont donc des cercles centrés en O.

3) Gradient

Le gradient, noté $\overrightarrow{grad}f$, d'une fonction en un certain point est **un vecteur** qui caractérise la variabilité de cette fonction au voisinage de ce point. C'est le vecteur des dérivées partielles tel que :

$$df = \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dOM}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x} \times \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \times \overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial f}{\partial \theta} \times \overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \times \overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \times \overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial f}{\partial \theta} \times \overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} \times \overrightarrow{e_\varphi}$$

On définit la dérivée directionnelle de f au point M dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$, la quantité :

$$df_M(\vec{u}) = \overrightarrow{grad}f_M \cdot \vec{u}$$

2. Flux

On appelle flux $\Phi(\vec{V})$ du champ $\vec{V}(M)$ de classe C^0 en tout point M à travers la surface orientée S, le résultat de l'intégrale double :

$$\Phi(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \qquad \text{avec } \vec{n} \text{ le vecteur normal à la surface S}$$

Si $\vec{V}(M)$ est constant et si $\vec{V}(M)$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, alors $\Phi = \pm\|\vec{V}(M)\| \times \mathcal{A}_S$ avec $\mathcal{A}_S$ l'aire de la surface S. Le signe dépend de si $\vec{V}(M)$ et $\vec{n}$ vont ou pas dans le même sens.

3. Circulation

On appelle circulation $\mathrm{C}(\vec{V})$ du champ $\vec{V}(M)$ de classe C^0 le long d'un arc de courbe orienté Γ issu de la fonction $\vec{\gamma}(t)$ de classe C^1 le résultat de l'intégrale :

$$\mathrm{C}(\vec{V}) = \int_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}l \qquad \text{avec } \vec{\tau} \text{ le vecteur tangent à la courbe } \Gamma$$

$$\vec{\gamma}(t) : [a,b] \longrightarrow U \;\; si \;\; \overrightarrow{OM} = \vec{\gamma}(t) \;\Leftrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \vec{\tau}\,\mathrm{d}l$$

Remarque : Si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire f, $\vec{V}$=-$\overrightarrow{grad}f$ alors :

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = f\big(M(a)\big) - f(M(b))$$

EXERCICE

1) Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel $U(x,y,z) = 1 + x + xy + xyz$?

2) Soit le champ de scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x) = x^2 + y^2$:
a) Déterminer les isoscalaires du champ f.
b) Exprimer a =$\overrightarrow{gradf}$
c) Exprimer la variation df pour un déplacement $df = (dx, dy, dz)$.
d) Déterminer la famille des lignes de champ du vecteur a

3) Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

CORRIGE

1) Le champ vectoriel qui dérive du potentiel U est $\overrightarrow{grad}(\mathrm{U}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$. Il s'agit donc du champ vectoriel de composantes :$\overrightarrow{grad}(U) = (1 + y + yz\ , x + xz, xy)$.

2) a) On pose $x^2+y^2=$ *Constante*. C'est l'équation d'un cercle. Donc les lignes de champs sont des cercles de centre 0 et de rayon $\sqrt{constante}$ dans le plan (xOy), soit des cylindres dans l'espace de rayon $\sqrt{constante}$.

2) b) $a = \overrightarrow{gradf} = (2x, 2y, 0) = 2x\,\overrightarrow{ex} + 2y\,\overrightarrow{ey}$

2) c) $df = \overrightarrow{gradf}.\overrightarrow{dl}$. On applique le produit scalaire : $df = 2x\,dx + 2y\,dy + 0$

2) d) $\frac{dOM}{dt} = a \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2x\,; \frac{dy}{dt} = 2y\,; \frac{dz}{dt} = 0$

$$\Rightarrow x(t) = ae2t;\ y(t) = be2t\,; z(t) = c, t \in \mathbb{R}$$

On obtient donc un système d'équations paramétriques des lignes de champ. On en déduit donc que $y = kx$ avec $k \in \mathbb{R}$

3) Soit $\omega = 3xdx + (x + y)dy$, la forme différentielle associée à $V(x, y)$.

Considérons $x = cos(t)$ et $y = sin(t)$ comme paramétrage du cercle de centre 0 et de rayon 1 (avec $t \in [0;\ 2\pi]$). La circulation $C = \int \vec{V}.\overrightarrow{dl}$ n'est autre que :

$$\int \vec{V}.\overrightarrow{dl} = \int w = \int_0^{2\pi} (3\cos(-\sin t) + (cost + \sin t)cost)\,dt$$

Comme $cos2t = (cos(2t) + 1)/2$, on obtient :

$$\int \vec{V}.\overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} (-2\sin(t)\cos(t) + (\cos(2t) + 1)/2)\,dt = [\cos^2(\mathrm{t}) + 1/4\sin(2\mathrm{t}) + \mathrm{t}/2]$$

$$= \pi$$

Remarquons que si la forme ω avait été exacte, on aurait obtenu $C = \int \vec{V}.\overrightarrow{dl} = 0$ comme réponse, puisque l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur une courbe fermée est nulle.