MATHS 2

Le mot du Resp'

Ehhh salut à toi mon ptit salamèche,

Tout d'abord bienvenue à l'INSA, j'espère que tu kiffes l'ambiance !

T'as du déjà passer de super bons moments entre l'inté, le WEI, les soirées esca et la Kfet!
Bon, je suppose que si tu as ouvert cette annale de maths c'est qu'une IE arrive (ou que tu t'ennuies mais là ça serait vraiment bizarre) mais ne t'en fait pas, on t'a préparé un pokedex digne des plus grands combats d'arène. Il te suffit juste d'acquérir quelques pouvoirs pour mettre K.O. les maths du S2 !

Laissons place aux dédicaces maintenant !

Ma première dédicace est évidemment pour ma famille d'amour : les COTON-TIJS! Ok, le nom est un peu relou mais c'est vraiment la meilleure miff de l'INSA. Merci pour toutes les soirées et pour ces incroyables week-ends (dont je ne garde pas bcp de souvenirs…). Gros cœur sur la triple louche !!!

Ensuite, grosse dédicace aux Totalistespies aka les TLS la meilleure liste ever. J'ai passé des supers bons moments avec vous et j'espère encore en passer de nombreux. Gros big up à la team costumesss.

Sans oublier le parfait mélange TLS/COTONS : Martin, Hélène et Ambre sans qui mon année aurait été totalement différente.

Et enfin je ne pouvais pas finir sans parler de la meilleure filière de l'INSA (AMERINSA si t'avais pas capté). T'as sûrement déjà entendu parler de nous entre les ameros et le weski mais tkt classique c'est cool aussi !
Gros cœur sur le groupe 83 (les putes de l'INSA pour les intimes, @putesdelinsa sur insta), incontestablement la meilleure classe d'Amer ! Si tu fais partie de ce groupe t'es vraiment un bo$$.

Et bien sûr dédicace à mes futurs bizs, j'ai hâte de vous rencontrer et de passer de supers bons moments avec vous !

Adeloux aka la chasseuseee

Table des matières

Chapitre 1 : Equations différentielles à second membre non constant

Ins'a la rescousse des équas diffs, oui ce que t'as fais au 1er semestre mais en un peu plus compliqué, c'est trivial. On n'est pas à Poudlard (t'as capté la ref ?) mais cette fiche va métamorphoser ton niveau en maths. T'inquiètes pas je t'assure que tes problèmes s'envoleront vers d'autres cieux et avec ce que je t'ai préparé tu seras dans un bon mood et pas à relire ton cours sur Moodle.

Dédicace au g8, à la lanière Boss, aux Squatteurs du 8, à Hérold et Pitou (les meilleurs bizs), à la A142 (askip les meilleures coturnes de l'INSA). Et Lucie cœur sur toi pour avoir goûter tous mes plats grillés (askip la plus gentille).

Eric Marcel

COURS

1. Définitions

- Une équation différentielle linéaire du 1er ordre normalisée est une équation de la forme :

$$\textbf{(E) } y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues sur I

On appelle solution sur I de l'équation (E) toute fonction dérivable sur I telle que $\forall t \in I$, $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$.

- L'équation homogène associée à (E) est (H) : $\mathbf{y' + a(t)y = 0}$

2. Méthode de résolution

1) Détermination de l'intervalle de résolution

Par exemple, si a(t)= 1/x alors I1= $\mathbb{R}_+^*$ et I2= $\mathbb{R}_-^*$

2) Résolution de l'équation homogène y_H

- L'ensemble des solutions de (H) est y_H **= λe^−A(t)**, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a sur I.

  Par exemple, résolvons sur]0,+∞[, (H) : y' – $\frac{2}{t}$ y $= 0$.
  Dans ce cas, a(t) = – $\frac{2}{t}$
  a est continue sur]0, +∞[et admet –2ln(t) comme primitive.
  On a : $e^{2\ln(t)} = t^2$ donc les solutions de (H) sont les fonctions λt^2 avec, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) Recherche d'une solution particulière y_P

- Cas général :

  Méthode : Une solution particulière de (E) est la fonction : $\boldsymbol{\lambda(t)e^{-A(t)}}$ où λ est une primitive de la fonction : $b(t)e^{A(t)}$

- Attention la solution particulière est parfois **évidente** donc pas besoin de faire tout ça

4) Forme générale de la solution

- L'ensemble des solutions de (E) s'obtient tel que : y(t) = y_H(t) + y_P(t)

5) Recollement (éventuellement)

- Dans le cas où il existe plusieurs intervalles, nous devons procéder à un recollement, c'est à dire que nous allons chercher s'il existe λ1, λ2, … tels que y(t) soit continue et dérivable au(x) point(s) posant problème.

EXERCICES

Résoudre l'équation différentielle suivante : sin(x)y'(x) – cos(x)y(x)= 1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

CORRIGE

sin(x)y'(x) – cos(x)y(x)= 1 ↔ $y'(x) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)}$

Equation homogène associée : y'(x) $- \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y(x) = 0$

Les solutions définies sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ sont $y_h(t)=Ce^{\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx} = e^{\ln(\sin(x))} = C\sin(x)$

avec C un réel.

On utilise la méthode de la variation de la constante : on pose pour tout x ∊ ℝ,

y_P (x)=φ (x)sin(x)

y'_P (x)=φ '(x)sin(x)+ φ (x)cos(x)

En remplaçant et après simplification : φ '(x) = $\frac{1}{\sin^2(x)}$

La primitive de $\frac{1}{\sin^2(x)}$ est $\frac{-1}{\tan(x)}$ donc $\varphi(x) = \frac{-1}{\tan(x)}$

Par suite y_P(x)=-cos(x)

Les solutions sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ sont donc : y(x) = C sin(x) - cos(x), C∊ ℝ

Chapitre 2 : Systèmes linéaires

Hello petit bizuth ! Si tu lis ça t'as bien raison c'est le début du S2, faut prendre des bonnes résolutions ;) ! Après t'inquiète, que tu t'y prennes en avance (bravo) ou au dernier moment (genre le jeudi), ce petit récapitulatif des systèmes linéaires va te permettre de saisir l'essentiel de ce chapitre ! Promis, je vais être synthétique et clair mais maintenant place aux dédicaces !

Commençons par le début, la SEXAP une miff de légende !! Quel plaisir ces petits "SEX SEX SEX" à l'inté et ce parrain de qualité à peu près aussi grand que fort au coincoin !

Dédi bien sûr à Salakis.. euh ma cobiz aka la plus grosse squatteuse de France et sa daronne I, dédi au plus gros bg de l'insa, Top 10 mini, mon coturne le crack des FAS qui pue des ieps, gros coeur sur les zoneurs.

Dédi à une liste de vrais barjots les Ins'anesthésistes, CdPlatre pour toujours. Bien sûr mes gars de la muscu avec qui on aura jamais pris de muscle mais c'était drôle pensée aux charges inexistantes d'Adrien et aux reps éclair de Pierre.

Enfin dédi à mes futurs bizzs !! Je sens déjà que vous allez être des cracks, on va faire des dingueries ensemble à l'inté !! <3

Signé PO, le CdPas mou

COURS

Ce chapitre, dresseur en herbe, te donnera toutes les clés afin d'affronter des exercices d'IE parfois compliqués. Alors prépare ta meilleure attaque, et bonne lecture !

1. Définitions et vocabulaire

K désigne R ou C

Un système linéaire de n équations à p inconnues, c'est un ensemble d'équations de la forme :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \dots \quad + a_{1p}x_p = b_1$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \quad \dots \quad + a_{ip}x_p = b_i$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad \dots \quad + a_{np}x_p = b_n$$

- ***{xj}* avec *1≤j≤p*** sont les **inconnues** du système
- Les nombres ***{aij} avec 1≤i≤n et 1≤j≤p*** sont les **coefficients** du système
- Les ***{bi} avec 1≤i≤n*** constituent le **second membre** du système
- Une solution du système est un **p-uplet** *(x1, x2, …, xp)* **d'éléments de K qui vérifient les n équations du système**
- Si *(b, b, b, …, b) = (0 ,0, 0 ,… , 0)* le système est dit **homogène**

2. Systèmes équivalents

1) Définition

On dit que deux systèmes (S) et (S') sont dit équivalents s'ils ont les mêmes solutions. Jusque-là, rien de nouveau pour toi.
Tu dois sans doute te demander quel est l'intérêt de se ramener à un système équivalent s'il possède exactement les mêmes solutions ? Et bien ça te permettra de retrouver un système que tu es en mesure de résoudre. Fais-moi confiance, l'utilité de cette technique te sautera aux yeux au fur et à mesure des chapitres.

6) Propriétés

Les opérations suivantes te permettent de passer d'un système à un système équivalent :

- Echanger deux lignes : **Li <=> Lj**
- Multiplier une ligne par un coefficient non nul : **Li <= αLj**
- Ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne : **Li <= Li + βLj**
- Echanger 2 colonnes

3. Méthodes de résolution

1) Résolution par substitution

Tu as normalement vu cette méthode au lycée et elle est parfaite pour résoudre les systèmes à 2 équations et 2 inconnues. Si le système comporte plus d'inconnues il faudra privilégier le **pivot de gauss** détaillé juste après.
Prenons le cas d'un système à 2 équations et 2 inconnues x et y, résoudre par substitution revient à procéder de la manière suivante :
- On exprime x en fonction de y à l'aide de l'une des deux équations ;

- Dans l'autre équation on remplace alors x par son expression en fonction de y ;
- On résout alors l'équation obtenue pour déterminer y.

7) Le pivot de Gauss

Cette méthode va être ta meilleure amie lors de la résolution des systèmes dès que tu as plus de deux inconnues.
Le but, c'est de se ramener à un système triangulaire, pour résoudre plus facilement ton système.

La méthode

a. **Choix du pivot :**

On choisit la variable de L_1 qui va nous servir de pivot, et on la fait disparaître des lignes L_2 à Ln. On choisit généralement x.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \ | \ \mathbf{L1} \\ 3x + 2y + z = 10 \ | \ \mathbf{L2} \\ 2x - 3y - 2z = -10 \ | \ \mathbf{L3} \end{cases}$$

Remarques :

- Si tous les coefficients *aij* et tous les *bj* sont nuls, tous les p-uplets d'éléments de K sont solutions.
- Si tous les coefficients *aij* et si au moins un *bj* est non nuls, alors le système n'a pas de solution.
- Si l'un des coefficients *aij* est non nul, on peut le choisir comme pivot.

b. **Elimination**

Ici, tu utilises les combinaisons linéaires pour éliminer ta variable sur les autres lignes

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \ | \ \mathbf{L1} \\ 0 + 5y - 5z = -5 \ | \ \mathbf{L2'} = \mathbf{L2} - \mathbf{3L1} \\ 0 - y - 6z = -20 \ | \ \mathbf{L3'} = \mathbf{L3} - \mathbf{2L1} \end{cases}$$

c. **Changement de pivot**

Passe à la ligne suivante, change de variable et effectue la même méthode pour te débarrasser de cette variable dans les lignes suivantes.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \mid \mathbf{L1} \\ 0 - y - 6z = \ -20 \mid \mathbf{L2''} = \ \mathbf{L3'} \\ 0 + 5y - 5z = \ -5 \mid \mathbf{L3''} = \ \mathbf{L2'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \mid \mathbf{L1} \\ 0 - y - 6z = \ -20 \mid \mathbf{L2''} \\ '0 + 0 - 35z = \ -105 \mid \mathbf{L3'''} = \ \mathbf{L3''} + \ \mathbf{5L2''} \end{cases}$$

Tu obtiens ainsi un système triangulaire, qui te permet de déterminer tes solutions.

Remarque 1 :

En règle générale, continue jusqu'à ce que :

- Tu arrives à la dernière ligne ou,
- Il ne reste plus que des 0

Remarque 2 :

Le nombre de lignes de ton système équivalent te donne le **rang r** du système
Une fois que tu as simplifié ton système à l'aide de ton pivot, tu dois maintenant vérifier s'il est compatible :

d. **Analyse de compatibilité du système**

- Vérifie que tu n'aies pas d'égalités incohérentes du style :
  0 = 3
- Si ton système est compatible, tu dois alors déterminer s'il n'a qu'une seule solution, ou bien une infinité.

Pour ce faire, tu dois dégager les inconnues principales, des inconnues auxiliaires (paramètres) :

Rappel :

p=> nombre d'inconnues
r=> rang
p-r=> nous donne le degrés de liberté et le nombre de paramètre

- Si p-r = 0, alors toutes les inconnues sont principales et le système a une seule et unique solution.
- Si p-r ≠ 0, alors le système possède une infinité de solutions, qui dépendent du/des paramètre(s) choisi(s)
Dans le cas présent, le rang est égal à trois, et nous avons 3 inconnues (*x, y , z*).

$$p-r=3-3=0$$

Ainsi, toutes les inconnues sont principales, ce qui veut dire que ce système a une unique solution.

e. **Remontée du système**

On résout alors le système en partant du bas, et dans le cas de p-r≠0, les inconnues principales s'expriment en fonction des paramètres.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

f. **Cas du système homogène**

- Le p-uplet **(0, 0, …, 0)** est **toujours solution** du système homogène.
- Si ***(y_1, y_2, …, y_p)*** est solution du système homogène, alors **pour tout µ appartenant à K**, ***(μy_1, μy_2, …, μy_p)*** est solution du système homogène.
- Si ***(y_1, y_2, …, y_p)*** et ***(z_1, z_2, …, z_p)*** sont solutions du système homogène, alors ***(y_1+z_1, y_2+z_2, …, y_p+z_p)*** est solution du système homogène.

EXERCICES

<u>Exercice 1</u>

Résoudre ce système linéaire, préciser son rang. Vérifier s'il est compatible. Si oui, préciser s'il possède une unique solution ou bien une infinité.

$$\begin{cases} +y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+3z=4 \\ 2x+y+4z=7 \end{cases}$$

<u>Exercice 2.</u>

Résoudre le système linéaire suivant et discuter suivant les valeurs du paramètre m

$$\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases}$$

Exercice 3 :

VRAI OU FAUX

a) Si un système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.

b) Si un système a plus d'équations que d'inconnues, alors il a au plus une solution.

c) Si le rang d'un système est égal au nombre d'équations, et strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système a une infinité de solutions.

d) Si un système a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.

e) Si un système a une solution unique, alors son rang est égal au nombre d'inconnues.

f) Si un système n'a pas de solution, alors son second membre est non nul.

g) Si un système a un second membre nul, et si son rang est égal au nombre d'équations, alors sa solution est unique.

CORRIGE

Exercice 1.

On utilise ici la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à un système triangulaire :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \mid \mathbf{L1} \\ 0\ +y-2z=-1 \mid \mathbf{L2'}=\mathbf{L2}-\ \mathbf{L1} \\ 0-y+2z=1 \mid \mathbf{L3'}=\ \mathbf{L3}-\ \mathbf{L1} \\ 0-y+2z=1 \mid \mathbf{L4'}=\ \mathbf{L4}-\ \mathbf{2L1} \end{cases}$$

On remarque que

$$L3'=L4'$$

.

On remarque aussi que

$$L2'=-L3'$$

On peut donc supprimer deux de ces trois lignes.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \mid \mathbf{L1} \\ 0 \ + y - 2z = -1 \mid \mathbf{L2'} \end{cases}$$

On détermine à présent le degré de liberté de ce système :

r=2

p=3

p−r=3−2=1

Ce système a un degré de liberté, il comporte donc 1 paramètre, ce qui signifie que le système a une infinité de solutions.
Soit z le paramètre, on peut ainsi écrire :

$$\begin{cases} x = 4 - 3z \\ y = 2z - 1z = z \end{cases}$$

S={(4, −1, 0)+(−3, 2, 1)z}

Solution particulière avec z fixé et z=0 Solution du système homogène

Exercice 2.

$$\begin{cases} x + y + z = m + 1 \mid \mathbf{L1} \\ 0 + (1 - m)y - z = -m^2 \mid \mathbf{L2'} = \ \mathbf{L2} - \mathbf{mL1} \\ 0 + (m - 1)y + 0 = -m \mid \mathbf{L3'} = \ \mathbf{L3} - \ \mathbf{L1} \end{cases}$$

On change maintenant de pivot :

$$\begin{cases} x + y + z = m + 1 \mid \mathbf{L1} \\ 0 + (1 - m)y - z = -m^2 \mid \mathbf{L2'} \\ 0 + 0 - z = -m - m2 \mid \mathbf{L3''} = \ \mathbf{L3'} + \ \mathbf{L2'} \end{cases}$$

On revient bien encore à un système triangulaire. Déterminons maintenant le rang de ce système pour les cas suivants :

- m = 1

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \mid \mathbf{L1} \\ 0 + 0 - z = -1 \mid \mathbf{L2'} \\ 0 + 0 - z = -2 \mid \mathbf{L3''} \end{cases}$$

On obtient z = 1 et z = 2

Or 1≠21≠2, ce système est donc incompatible si m=1

S=∅

- $m \neq 1$

$$\begin{cases} x+y+z=m+1 \mid \mathbf{L1} \\ 0+(1-m)y-z=-m^2 \mid \mathbf{L2'} \\ 0+0-z=-m-m2 \mid \mathbf{L3''} = \mathbf{L3'} + \mathbf{L2'} \end{cases}$$

r=3

p=4

p−r=4−3=1

Le système a un degré de liberté, donc un paramètre.
Posons m comme paramètre de ce système

$$\begin{cases} x = \dfrac{-m}{1-m} - m^2 - m \\ y = \dfrac{m}{1-m} \\ z = m^2 + m \end{cases}$$

Exercice 3 :

a) Faux b) Faux c) Vrai d) Faux e) Vrai f) Vrai g) Faux

Chapitre 3 : Espaces Vectoriels

Wsh petit dresseur bien ou quoi ? Alors ici comme t'as dû le voir c'est le chapitre sur les espaces vectoriels. Franchement entre toi et moi, même si le cours à l'air super perché (et c'est sûrement pas nouveau à ce stade), les exercices sont assez similaires et jte conseille d'en faire un max avant l'IE, tu verras que c'est pas bien difficile. Bref finis les conseils bateaux et place aux dédis.
Gros big up à la team, la lignée de cœur, mes tarpés préférés (Oh celui de Massi jvous dis même pas), le zooo (Bien évidemment Momo, Ismail, Mehdi, Youssef, Ilyes et tous mes autres ptits arabes du groupe whatsapp) cœur sur vous y'a rien à dire bien mafé bien thieb.
Forcément un grand merci à Yassine mon parrain (jspr quand vous lirez ça il s'est coupé les cheveux parce que vasy miskin même pas jvais parler) et bien sûr tous ses potos de l'aceimi qui m'ont bien épaulé.
Dédi au Tijiuana, vous m'avez bien fait kiffer l'inté même si askip on m'appelle Casper <3.
Jvous oublie pas les ptits cowboy, les saloooons. Bordel quesqu'on a bien dahak quand même, vous avez refait ma pré-campagne et campagne ☺
Grosse grosse dédi aux 2 dresseurs qui m'auront comme parrain l'année prochaine jvous promets on va kiffer sa mère vous êtes pas prêts ptn.

Riad

COURS

1. Espace vectoriel

1) Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni d'une loi de composition interne+ (ex: addition) et d'une loi de composition externe • (ex: multiplication) note (E; +; *).
Ces lois possèdent un certain nombre de proprietes (associativite, commutativite, distributivité et un élément neutre) surtout essentielles pour définir un EV mais pour etre honnête avec toi, on ne l'utilise clairement pas en exercice. Les éléments de l'ensemble E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appeles scalaires.

8) Sous espace vectoriel

On peut diviser un EV en plusieurs ensembles : les SEV. On dit que F est un SEV de E si :

- F non vide (contient le vecteur nul)
- ∀(u,v) ∈ F, ∀λ ∈ R, u+λv ∈ F (on dit que F est stable par addition et par multiplication externe)

<u>Bon du coup si on te demande de montrer que F est un SEV de E, tu peux:</u>

- Reprendre la définition
- Ecrire sous forme de Vect quand tu le peux (cf 2) Famille génératrice et base)
- Montrer que F n'est pas vide: regarder si 0 ∈ F, et si ce n'est pas le cas, ça te fait un contre-exemple efficace pour dire que F n'est pas un SEV.

- Si F et G sont deux SEV de E alors FnG est un SEV de E (attention généralement faux pour l'union).
- On peut additionner deux SEV mais pas les multiplier, les diviser ou les soustraire. La somme H de F et G (deux SEV de E) est l'ensemble noté F+G tel que $x_h = x_f + x_g$.
- F1 et F2 sont une somme directe si la décomposition de tout élément de (F1 +F2) en somme d'un élément de F1 et d'un élément de F2 est unique ⇔ FnG = 0.
- On dit alors que F1 et F2 sont supplémentaires. On note F1⊕F2.

<u>Remarque :</u> On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{x1}, \overrightarrow{x2}, \dots, \overrightarrow{xp}$ tout vecteur $\vec{x}$ de E qui s'écrit sous la forme
$\vec{x} = \lambda 1\, \overrightarrow{x1} + \lambda 2 \overrightarrow{x2} + \cdots + \lambda p \overrightarrow{xp}$ (c'est une petite explication pour la suite).

<u>Si on te demande de montrer l'égalité entre deux SEV F et G tu peux faire une :</u>

- Double inclusion : F ⊂ G et G ⊂ F
- Simple inclusion et utilisation de la dimension : Si F ⊂ G et dim(G) = dim(F) alors F = G.

2. <u>Familles et bases de vecteurs</u>

1) Familles libres ou liées

Une famille de vecteurs est composée d'un ensemble de vecteurs de E. Si aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres alors on a E=Vect($\overrightarrow{x1}, \overrightarrow{x2}, \dots, \overrightarrow{xp}$). Vect est alors l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille E.

- Une famille est liée s'il existe une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille ($\overrightarrow{x1}$,…, $\overrightarrow{xp}$): (a1, …, ap) (0, ..,0) tel que a1. $\overrightarrow{x1}$+…+$\overrightarrow{xp} = 0$

- A l'inverse une famille est libre si elle n'est pas liée.

<u>Donc si on te demande de montrer qu'une famille est libre tu peux :</u>

- Utiliser la définition en résolvant un système
- Montrer que la famille est échelonnée, ou l'échelonner (voir la méthode juste après)
- Dans le cas particulier de polynômes ayant des degrés tous différents
- Dans le cas particulier des fonctions : utiliser la définition et obtenir un système en évaluant en autant de points (choisis intelligemment) que de vecteurs.

<u>Pour une famille liée (donc pas libre) il te suffit de :</u>

- Chercher une combinaison linéaire nulle des vecteurs
- Echelonner la famille pour trouver des vecteurs nuls

Bon depuis tout à l'heure je t'explique qu'il faut échelonner mais cette méthode tu ne peux pas la connaitre par magie donc mon ptit dresseur voilà la recette de la <u>méthode des zéros échelonnés :</u>

Soit une famille de 3 vecteurs (v1, v2, v3) tel que v1 = (2,2,2), v2 = (6,6,6) et `
v3 = (4,5,3)

$$\begin{array}{ccc} v1 & v2 & v3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ccc} v1 & v2-3v1 & 2v3-3v1 \end{array} \quad \begin{array}{cc} v1 & 2v3-3v1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(v1, v2, v3) est donc liée
rg(v1, v2, v3) = rg(v1, v3) = 2

Soit une famille de 3 vecteurs (u1, u2, u3) tel que u1 = (2,2,2), u2 = (6,6,6) et
u3 = (4,5,3)

$$\begin{array}{ccc} u1 & u2 & u3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} u1 & 3u2-u3 & u3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Une fois échelonnée, la famille est donc libre
rg(u1, u2, u3) = 3

2) Familles génératrices et bases

- Une famille est génératrice de l'EV si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de (v1, ..., vp) famille de p vecteurs de E : E=vect(v1, ..., vp) .
- Base= La base d'un espace est une famille génératrice étant aussi libre.
- L'ensemble vide est la base du SEV de {OE}.

Méthode pour montrer qu'une famille est une base β

- Si ta famille est : libre + génératrice = base β
- En dimension finie :
  - Si ta famille est : libre + card(β) = dim(E) alors → base β
  - Si ta famille est : génératrice + card(β) = dim(E) alors → base β

Méthode pour déterminer une base β

On peut utiliser la méthode des zéros échelonnés afin de ne garder que les vecteurs libres d'un SEV de E. On ne garde que les vecteurs utiles. Enfin, on regarde si la dimension de F est la même que E. Si oui, ces vecteurs forment une base de E.
Stress pas, même si on en a déjà parlé vite fait, l'explication de la dimension arrive juste après ☺.

3. Familles et bases de vecteurs (oui encore)

1) Familles libres ou liées

- Un EV est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Sinon il est de dimension infinie. Par exemple, la dimension de $|R_2$ est 2 et la dimension de $|R_2[X]$ est 3. D'ailleurs, F= ((1,0) ; (0,1)) est une base de $|R_2$ et G = (1 ; X ; X_2) une base de $|R_2[X]$
- Soient G et H deux SEV de E, dim(G+H) = dim (G) + dim (H) - dim (G∩H)
- Si G et H sont supplémentaires dans E, alors dim (G∩H) =0 et dim(E)=dim(G)+dim(H)

2) Sous-espaces supplémentaires

On va revenir rapidement sur la notion d'espaces suplémentaires parce qu'on pourra te le demander en IE. En gros, pour montrer que deux SEV sont supplémentaires il y a plusieurs méthodes:

$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \{E = F + G \mid F \cap G = \{0\} \}$

En dimension finie :

$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \{E = F + G \mid \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\}$
$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \{F \cap G = \{0\} \mid \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\}$

4. Rang d'une famille

On appelle rang de F, noté rg(F), la dimension du SEV Vect(F).
Grâce à la méthode des zéros échelonnés, on peut alors trouver le rang qui correspond au nombre de vecteurs de la famille échelonnée : rg(v1, ...,vp)= dim (vect(v1, ..., vp))
Lorsque la famille est échelonnée, à l'aide de la méthode au-dessus, tu regardes le nombre de vecteurs restants et ceci te donne le rang.
La dimension c'est pour un EV ou SEV et le rang pour une famille.
Par exemple, on ne note pas dim(v1, v2, v3) mais rg(v1, v2, v3).

EXERCICES

Exercice 1

Soient v1= (1,0,0,1), v2 = (0,0,1,0) et v3 = (0,1,0,0) dans R_4 Vect(v1, v2) et Vect(v3) sont-ils supplémentaires dans R_4 ?

Exercice 2

Montrer que les vecteurs u1 = (0,1,1), u2 = (1,0,1) et u3 = (1,1,0) forment une base de R_3. Trouver les composantes du vecteur w = (1,1,1) dans cette base (u1, u2, u3).

Exercice 3

Soient v1 = (1, 3, 6), v2 = (2, 7, 4), v3 = (1, 4, -2). A = Vect(v1, v2, v3)
Trouver une base de A

CORRIGE

Exercice 1

dim(v1, v2, v3) = 3 et dim(R_4) = 4 donc Vect(v1, v2) et Vect(v3) ne sont pas supplémentaires dans R_4.

Exercice 2

Pour montrer que la famille (u1, u2, u3) est une base de R_3, il faut montrer que la famille est libre et génératrice.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 - u_3 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1+u_2-u_3 & u_2-u_3 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

La famille est donc à présent échelonnée (par le haut cette fois-ci) et on a donc $rg(u_1, u_2, u_3) = 3$ donc elle est libre

De plus, $R_3 = Vect(u_1, u_2, u_3)$ donc (u_1, u_2, u_3) est génératrice. Ainsi (u_1, u_2, u_3) est libre et génératrice donc c'est une base de R_3.

Pour trouver les composantes de w dans la base (u_1, u_2, u_3), on résout $w=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3$, ce qui donne un système 3 équations 3 inconnues.

On trouve $w=0{,}5u_1+0{,}5u_2+0{,}5u_3$

Exercice 3

On échelonne les vecteurs :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & 3v_2-2v_1 & 3v_3+v_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 15 & 15 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & 3v_2-2v_1 & 3v_3+3v_1-3v_2 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$A = Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$ avec (v_1, v_2) qui est libre et génératrice de A. Donc la famille (v_1, v_2) est la base de A.

Chapitre 4 : Applications linéaires

Salut jeune dresseur ! J'espère que tu as digéré le chapitre sur les EV parce qu'ici tu vas encore en manger ! Mais je te rassure les applications linéaires c'est plutôt cool. Les AL, une fois que tu connais la recette ça passe crème. Ces quelques pages vont te ramener dans le droit chemin de la compréhension.
Avant tout, place aux dédicaces :
Déjà gros big up à tous les Amers ! Incontestablement la meilleure filière, qui organise les meilleures soirées, si t'es un habitué tu comprendras mieux si je dis « Amero ». Et c'est vrai que, comme tout le monde le dit, le niveau est beaucoup plus dur en Amerinsa, mais bon après tout on est plus fort aussi ☺☺☺. Ensuite, vive les Totalistespies (aka TLS), meilleure liste ever, épaulée par la meilleure des resp, ROSITA (comme quoi y'a des Eurinsas sympas aussi ☺. Au passage, incrustez-vous dans leur Weads, c'est… différent je dirais, y'a des gens qui font des trucs chelous on m'a dit ;))
Pour finir dédicace à mes 2 futurs bizs ! Et mince j'allais oublier : vive la GUADELOUPE , vive les Antilles ! Gwada-Mada nou ansanm, thimbé rèd pa moli ! All Day In ka rivé !

Matéooo

COURS

1. Applications linéaires

1) Définition

On prend deux espaces vectoriels E et F. Une application f : E → F est linéaire si pour tout (x,y) appartenant à E et pour tout λ appartenant à K :
f(x + λy) = f(x) + λf(y)

Petit exemple pour comprendre :
Soient $E=R^2$ et $F=R^2$ (les espaces peuvent être différents) et f(x,y) = (3x-y , x+2y)
On prend deux vecteurs, appartenant à E, u(x,y) et v(x',y') et on vérifie que la définition juste au-dessus marche c'est-à-dire si f(λu + v) =λ f(u) + f(v)

$$(\lambda u + v) = (\lambda x + x', \lambda y + y') \rightarrow f(\lambda u + v) = (\, 3(\lambda x + x') - (\lambda y + y')\,) = (\, 3\lambda x + 3x' - \lambda y - y')$$
$$= (\, 3\lambda x - \lambda y + 3x' - y')$$
$$= (\, \lambda (3x - y) + (3x' - y')\,)$$
$$= \lambda f(u) + f(v)$$

2) Propriété

- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.
- Si E = F, on dit que f est un endomorphisme.

- Si E = F et f est bijective, on dit que f est un automorphisme.
- Si F=K, on dit que f est une forme linéaire sur le K-espace vectoriel de E

2. Image et noyau d'une application linéaire

1) Définitions

- Le noyau de f, noté Ker(f), est le SEV de E qui comprend l'ensemble des vecteurs u tel que **f(u) = 0**. Pour le trouver, il faut chercher les vecteurs pour lesquels f s'annule.
- L'image de f, noté Im(f), est le SEV de F qui comprend l'ensemble des images de l'application f : **f(E) = Im(f)**.

Ces deux exemples devront t'aider :
On pose f(x,y) = (4x + 3y, 7x – 2y) un endomorphisme de R^2

Déterminer l'image de f :
Soit u=(a,b), u appartient à Im(f) si et seulement s'il existe (x,y) tels que f(x,y)=(a,b).
u = (4x + 3y, 7x – 2y) = x(4,7) + y(3,-2) →on peut extraire les vecteurs (4,7) et (3,-2).
D'où Im(f)=vect({v1, v2}) avec v1=(4,7) et v2=(3,-2). (Attention il faut vérifier que la famille de vecteurs de Im(f) soit libre, donc les vecteurs doivent être échelonnée)

Déterminer le noyau de f :
On doit résoudre f(x,y)=0 ce qui revient à poser le système

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 7x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -(4/3)x \\ 7x + (8/3)x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc Ker(f)=(0).

2) Propriétés

1. f est surjective si et seulement si Im(f) = F
2. f est injective si et seulement si Ker(f) = { 0 }
3. Si dim(E) < dim(F), alors f n'est pas surjective
4. Si dim(E) > dim(F), alors f n'est pas injective

3. Projecteurs

Soit F et G deux supplémentaires de E.
$\forall x \in E, \exists (x_G, x_F) \in G \times F, x = x_G + x_F$
On appelle projection (ou projecteur) sur F parallèlement à G l'application p : E → E définie par : $p(x) = x_F$
Ker(p) = G et Im(p) = F

Donc p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, p est la projection sur Im p parallèlement à Ker p.

EXERCICES

Exercice 1

L'application $h : R^3 \to R^2$ telle que $h(x, y, z) = (2x - y + z, 5y + 3z)$ est-elle linéaire ?

Exercice 2

Soit $f : R^2 \to R^3$ l'application définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$

Déterminer le noyau et l'image de f. Cette application est-elle sujective ? Injective ?

CORRIGE

Exercice 1

On pose $u(x,y,z)$ et $v(x',y',z')$ appartenant à R^3. On veut montrer que $h(\lambda u + v) = \lambda h(u) + h(v)$

$(\lambda u + v) = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$

$$\begin{aligned} h(\lambda u + v) &= (2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), 5(\lambda y + y') + 3(\lambda z + z')) \\ &= (2\lambda x + 2x' - \lambda y - y' + \lambda z + z', 5\lambda y + 5y' + 3\lambda z + 3z') \\ &= (2\lambda x - \lambda y + \lambda z + 2x' - y' + z', 5\lambda y + 3\lambda z + 5y' + 3z') \\ &= (\lambda (2x - y + z) + (2x' - y' + z'), \lambda (5y + 3z) + (5y' + 3z')) \\ &= \lambda h(u) + h(v) \end{aligned}$$

Donc h est une application linéaire.

Exercice 2

- Déterminons le noyau de f :

Soit $a(x,y)$. u appartient à Ker(f) si et seulement si $f(u) = 0$ donc on pose le système suivant :

$$\begin{array}{lll} x+y=0 & \to x = y & \to x = 0 \\ x-y=0 & 2x = 0 & y = 0 \\ x+y = 0 & & \end{array}$$

Donc $Ker(f) = \{0\}$ et f est injective.

- Déterminons l'image de f :

Soit $b(u,v,w)$. b appartient à Im(f) si et seulement si il existe (x,y) tel que $(u,v,w)=f(x,y)$.

$$\text{D'où} \quad \begin{array}{ll} u = x+y & \to (u-v)/2 = y \\ v = x-y & (u+v)/2 = x \\ w = x+y & w-u = 0 \end{array}$$

Donc $Im(f) = \{(u,v,w) \in R^3 \setminus u-w = 0\}$. Elle n'est pas sujective car (on peut utiliser un contre exemple) le vecteur (1,1,0) n'est pas dans Im(f) .

Chapitre 5 : Matrices

Hello jeune dresseur !
Si tu es ici c'est sûrement qu'on est jeudi soir et que t'es en train de galérer sur tes exos de maths. Ne t'inquiète pas, on t'a préparé un petit cours rien que pour toi !!
Tu vas voir, les matrices c'est pas si difficile que ça en a l'air. Les mêmes exos reviennent assez souvent et en t'entraînant un peu tu devrais t'en sortir. Mais avant ça, laisse-moi faire ma dédicace !
Avant tout, énorme dédicace aux Meren, la meilleure des familles. Toujours de bonne humeur, avec de magnifiques capes roses, tu peux pas nous louper ;)
Les cdputes, Alex, ma charo pref et Lisa ma future coturne, je pouvais pas espérer mieux <33
Gros big up à la meilleure liste, les TotalisteSpies !!! Je suis trop heureuse de vous avoir rencontré, trop heureuse d'avoir vécu tout ça avec vous, c'était juste incroyable. Un rap mémorable (si tu l'a toujours pas écouté, t'attend quoi ??), des costumes de qualité et une ambiance de folie, merci pour tout :)
Je peux pas finir avant d'avoir remercié le meilleur groupe de l'insa : le groupe 6 (@g6soif). J'ai passé une année incroyable avec vous (pour ceux qui sont encore là mdr). Entre la raclette, le ski, le coffee shop, les foots et les volleys, je pouvais vraiment pas espérer mieux. Gros cœur sur vous <33
Bon je te laisse tranquille, travaille bien et bonne chance pour ton IE !

Nono <3

Salut jeune dresseur des îles, je m'incruste chez Nono pour faire ma dédi, tqt ça sera pas long, on commence avec la crème de la crème, une classe aberrante frérot LE G6 : dedi au crack du fond de la classe const pour les soirées LDC, Massi le pire cardio d'europe, le big crane de Mathis, Nono la victime, Antoine le + gros charo, Clémence la pire partenaire de TP, Liam toujours à l'heure (ou pas), le Vigneron officiel aka le V. Le meilleur week-end de ski, le conseil sombre, grosse faim, bref <3 sur vous.
Dédi a la meilleure liste les TLSSSSSS, on carry l'inté nananananana (j'espère t'as la ref). Une campagne de fou furieux, un rap bientôt disque de platine, je me suis fait victime dans le teaser mais trql y'a pas de galère. Petite pensée aux tactiques avec l'équipe. Que du love, vous êtes injouables.
Et pour la ultima dédi, BIG dedi aux AI !!! Une famille de fou furieux.
Si t'es encore là j'espère que t'as kiffé l'inté de moula qu'on t'a préparé et bonne chance pour tes révisions !

Inox

COURS

1. Matrices

1) Définition

On appelle **matrice** (n,p) à **n** lignes et **p** colonnes un tableau de valeurs de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a11 & \cdots & a1p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ an1 & \cdots & anp \end{pmatrix}$$

De plus, on note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices **(n,p)** dites à coefficient dans $\mathbb{K}$.

2) Cas particuliers

Il existe également des matrices dîtes particulières :

- Si n = p, alors la matrice est dite carrée
- Si n = 1, alors la matrice est une matrice ligne
- Si p = 1, alors la matrice est une matrice colonne
- On appelle matrice identité de taille n, la matrice I_n,

Par exemple, prenons n = 3, alors $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Une matrice diagonale est une matrice dont seuls les coefficients de sa diagonale ne sont pas nuls, elle est donc de la forme $A = k * I_n$
- Tu pourras également rencontrer en TD des matrices triangulaires supérieures de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & \cdots & \cdots & a1n \\ 0 & a22 & \cdots & \cdots & a2n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & ann \end{pmatrix}$$

- Les matrices triangulaires inférieures appliquent le même principe que les matrices triangulaires supérieures et se présentent sous la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} a11 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a21 & a22 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ an1 & an2 & \cdots & \cdots & ann \end{pmatrix}$$

2. Opérations sur les matrices

1) La somme

C'est easy alors pas de soucis ! Tout ce que tu dois faire c'est vérifier le format de tes matrices et additionner leurs coefficients.
Pour se faire, tes deux matrices doivent avoir le même nombre de lignes et de colonnes et après tu additionnes les deux coefficients qui sont à la même place dans les matrices.
Et c'est pareil pour la différence (mais avec des soustractions bien sûr).
Si t'es plus visuel, voilà un exemple :

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Le produit de matrices

A nouveau, il va falloir que tu fasses attention au nombre de lignes et de colonnes de tes matrices. Pour le produit, il faut que le nombre de colonnes de ta matrice A soit égal au nombre de lignes de ta matrice B dans le cas ou tu ferais le produit AB.
Une fois cela vérifié, tu prends le premier élément de ta matrice A et tu le multiplies au premier élément de ta matrice B + le deuxième élément de la première ligne de A multiplié par le deuxième élément de ta première colonne de B + etc..
A nouveau, si t'es plus visuel voici un exemple (je te conseille de mettre la deuxième matrice plus haute que la première, perso c'est plus clair pour moi) :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

Tu peux également élever tes matrices à une certaine puissance :
La matrice A^n s'écrit aussi $A^n = A * A * A *\ldots* A$ (n fois)
Pour une matrice diagonale c'est ultra simple, il te suffit d'élever tes coefficients à la puissance souhaitée :
Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors tu auras $A^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$

3. Lien avec les applications linéaires

1) Matrice d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F. La matrice de f dans les bases B_E et B_F est la matrice (n,p) dont la colonne j est constituée de coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B_F.
Par exemple, Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \to (3x - 8y+5z,\ 6x-4y+10z)$$

Alors, on a : $f(1,0,0) = (3,6)$,
$f(0,1,0) = (-8,-4)$,

$f(0,0,1) = (5,10)$

Donc, $mat_{R^3,R^2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

2) Image d'un vecteur par application linéaire

Soit $f : (E, B_E) \to (F, B_F)$, une application linéaire.
On note X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base B et on note Y le vecteur colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base B_F.
Donc, y = $f(x) \Leftrightarrow Y = AX$

4. Inverse d'une matrice

1) Matrice inversible

Une matrice **carrée** A n'est inversible que s'il existe une matrice B telle que :
$AB = BA = I_p$ (B est unique et est appelée inverse de A : $B = A^{-1}$)

Soit $A = mat_{B_E,B_F}(f)$. A est inversible si et seulement si f est un isomorphisme de E dans F. On a alors, $A^{-1} = mat_{B_E,B_F}(f^{-1})$

2) Calcul de matrice inverse

Inverser la matrice A, c'est trouver X tel que $AX = Y$, avec Y fixé.
On résout alors un système, par exemple :
$AX = Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

On résout ensuite le système et on trouve $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -2x_1 + x_2 = y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{5} - \frac{2y_2}{5} \\ x_2 = \frac{2y_1}{5} + \frac{y_2}{5} \end{cases}$

De fait, on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, la matrice inverse de A.

5. Rang et changement de base

1) Rang d'une matrice

C'est le rang de la famille des vecteurs colonnes de cette matrice. Pour le déterminer, tu as juste à échelonner les colonnes de la matrice comme on le ferait pour une famille de vecteurs.

Une matrice carrée A de $M_p(\mathbb{K})$ est inversible si seulement si rg(A) = n.

2) Changement de base

Soient B, B' deux bases de E.
La matrice P de passage de B à B' est la matrice de B' dans la base B.
La colonne I de P est constituée des coordonnées de b'i dans la base B.
On note P = Pas(B,B')
P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de B à B'.
Cas des endomorphismes : si f est une application linéaire et A = $mat_B(f)$ et
A' = $mat_{B'}(f)$, alors A' = $P^{-1}AP$ et A = $PA'P^{-1}$.
Dans ce cas on dit que A et A' sont semblables.

EXERCICES

Exercice 1

Soient A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA.
1. Calculer l'inverse de ces matrices.

Exercice 2

Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique. Déterminer la matrice A' de f dans la base B'= ((1,1) ;(1,-1)).

CORRIGE

Exercice 1

1. AB = $\begin{pmatrix} 17 & -5 & 9 \\ 30 & 17 & -5 \\ -13 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ et BA=$\begin{pmatrix} 27 & -11 & 51 \\ -3 & 6 & -22 \\ -3 & 13 & 6 \end{pmatrix}$
1. $A^{-1} = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} -16 & 19 & 17 \\ 2 & -1 & 2 \\ 13 & -1 & -9 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \frac{1}{87}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 19 \\ 14 & 9 & 1 \\ 8 & 30 & 13 \end{pmatrix}$

Attention, pour cette question tu dois vérifier que ces matrices sont inversibles avant de commencer tes calculs !

Exercice 2

A = $mat_{B,B}(f)$ et A' = $mat_{B',B'}(f)$

On a P = Pas (B,B') = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et P^{-1}= $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ par invisibilité.

On a donc A' = $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$

.

Chapitre 6 : Suites

Wesh le biz, j'imagine que si t'es ici c'est que t'es en galère pour l'ie de demain, mais tkt mon reuf ça va bien se passer enfin on espère, ou alors t'es un crack à la recherche des erreurs que j'ai pu faire, je vous vois venir les gens à la Hamza (foutu Get). En vrai si t'es là pour l'ie tu vas voir c'est pas si dur, en plus bénef la méthode de Newton est plus au programme et je te conseille de passer direct au cours parce que là c'est le moment des dédicaces (mais si tu les lis t'es un vrai, le biz).

D'abord gros big up aux terreurs du Bat B qui sont toujours de bons complices pour voler un lit ou créer de nouvelles embrouilles DON'T FUCK WITH MEREN !!, sacré Bodard et Pissard. Ensuite comment pourrais-je oublier cet ivrogne de Vigneron, je me demande toujours comment il peut cavaler aussi vite en ingérant de telle quantité de spiritueux. Bien sûr comment ne pas parler de ce cher coturne, Hippolyte avec les trois autres affreux de Gâchette (crois pas j'ai oublié le Nesquik sur le mur), Hamza (le Get) et JNN, Tutur pour les intimes, qui m'auront fait pleurer de rire. Évidemment je dois aussi parler de ces cher ZZ avec qui on aura passé de sacrés apéros, mention spéciale à Pignon, Gautheret, James ce cher parrain, Tanoubi et à tous les autres ivrognes de Kalinowski, Cochrane et Delcourt…
On va aussi remercier notre petite Djackliste parce que sans eux je serais pas là à écrire cette dédicace, donc merci à vous les boss et oubliez pas : T'APPELLES QUI ??!!

Signé Le Pitrou

COURS

Ici, N est l'ensemble des entiers naturels et n ЄN

1. Rappels et Vocabulaire nouveau

1) Les bases que tu connais déjà (je l'espère)

Une suite peut être croissante ($Un+1>Un$), décroissante ($Un+1<Un$), monotone (si elle ne change pas de variation), minorée ($Un>AЄR$), majorée ($Un<AЄR$) ou bornée (les 2 à la fois).

Une suite est définie par récurrence s'il existe une fonction f telle que : $Un+1=f(Un)$

Types de suites :

Suite arithmétique (de raison r) : $Un+1=Un+r$ à On a alors $Un=U0+nr$
Suite géométrique (de raison q) : $Un+1=q*Un$ à On a alors $Un=U0*q^n$

Comportement en +∞ :

Une suite est convergente si elle tend (en +∞) vers une limite finie $l\in R$.
Elle est divergente si sa limite n'est pas un réel (soit +∞ soit -∞) ou si elle n'admet pas de limite.

2) La nouveauté

Une suite est stationnaire lorsqu'elle devient constante à partir d'un certain rang.
Suites extraites : Une suite (V_n) est extraite de (U_n) s'il existe une application f : N à N, **strictement croissante** telle que $V_n=U_{f(n)}$.

Ex de suites extraites de (Un) : $(U_{2n}),(U_{3n+1})$...

Suites adjacentes : 2 suites Un et Vn sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et que $\lim_{+\infty} Un-Vn=0$, elles convergent alors vers la même limite.

2. Propriétés et théorèmes importantes

Les principales propriétés vont servir aux calculs de limites (demandé systématiquement en exercice).
-Unicité de la limite : Une suite ne peut pas converger vers 2 limites à la fois.

-Toute suite convergente est bornée

-Th composition de limites :

Soit une application f : Df à R et (Un) une suite d'éléments du domaine de définition de f (Df).

Si $\lim_{+\infty} Un=k$ alors $\lim_{x\to k} f=l$ alors $\lim_{+\infty} f(Un)=l$

Les 2 théorèmes qui suivent, tu dois déjà les connaître mais je te les rappelle quand même.

-Théorème de comparaison :

Soient (Un) et (Vn), 2 suites telles qu'à partir d'un certain rang $(Un) <= (Vn)$:
Si $\lim_{+\infty} Un=+\infty$ alors $\lim_{+\infty} Vn=+\infty$.
Si $\lim_{+\infty} Vn=-\infty$ alors $\lim_{+\infty} Vn=-\infty$.

-Théorème des gendarmes :

Soient (Un), (Vn) et (Wn), 3 suites telles qu'à partir d'un rang (Un) ≤ (Vn) ≤ (Wn) :
Si (Un) et (Wn) tendent vers l alors (Vn) tend l.

-Théorème de la limite monotone :

si (Un) est croissante et majorée, alors elle converge.
si (U_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

-Limite des suites extraites :

(Un) converge vers une limite l si et seulement si toutes les suites extraites (il faut que l'ensemble N soit couvert par les fonctions f tel $V_n = U_{f(n)}$ convergent vers l.
Exemple : si U_{2n} et U_{2n+1} convergent vers l

3. Suites récurrentes

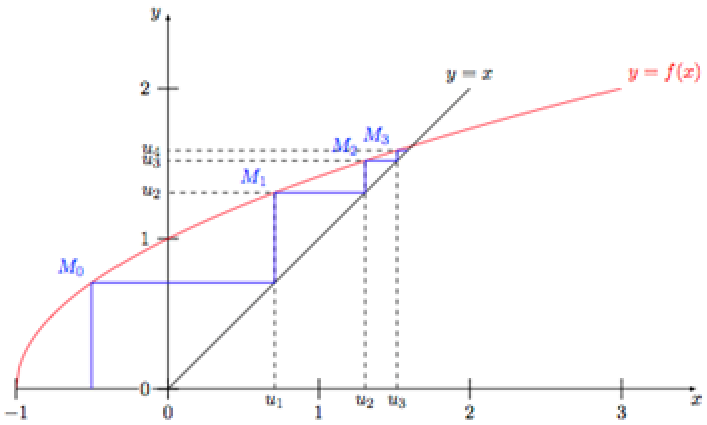
$\boldsymbol{Un+1=f(Un)}$ par exemple $Un+1=sin(Un)+1$

L'intervalle I est stable par f lorsqu'on a f(I) C I.
Pour la suite on suppose que I est stable par f.

1) Comportement de la suite

f est monotone :

si f est croissante sur I alors (Un) est monotone.
$U0 < U1$ à (Un) est croissante.
$U0 > U1$ à (Un) est décroissante.
si f est décroissante sur I alors ($U2n$) ($U2n+1$) sont monotones avec des sens de variations différents.
Comparer $U0$ et $U2$ par exemple pour trouver le sens de variation.



2) Théorème du point fixe

Quelques définitions :

-Point fixe:

a est un point fixe de f lorsque f(a)=a.

-Fonction contractante :

f est contractante sur I si il existe un réel k ϵ [0,1[tel que : |f(x)-f(y)|<= k|x-y|

Si un tel réel k existe mais que k n'appartient pas à [0,1[alors f est k-lipschitzienne (impossible de retenir ce mot).

Toute application contractante sur I est continue sur I.

Si il existe un réel k ϵ [0,1[tel que :|'f(x)|<=k alors f est k-contractante sur I

Enoncé du théorème du point fixe

- Soit f [a,b] à [a,b] une application k-contractante. Alors :
  1- f admet un unique point fixe l sur [a,b].
  2- (U_n) avec U_0ϵ [a,b] et $U_{n+1}=f(U_n)$ converge vers ce point fixe l.
  3- De plus $|U_n - l| <= k^n |U_0 - l| <= k^n (b-a)$

EXERCICES

Exercice 1 :

-Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

1. en étudiant les limites des suites extraites (U_{2n}) et (U_{2n+1}).
2. à l'aide d'équivalents.

CORRIGE

Exercice 1 : ~ signifiera toujours ici : équivalent en +∞ à

1) $U_{2n} = \frac{2n+(-1)^{2n}}{2n-(-1)^{2n}} = \frac{2n+1}{2n-1} \sim \frac{2n}{2n} = 1$

$U_{2n+1} = \frac{2n+1+(-1)^{2n+1}}{2n+1-(-1)^{2n+1}} = \frac{2n+1-1}{2n+1+1} = \frac{2n}{2n+2} \sim \frac{2n}{2n} = 1$

(U_{2n}) et (U_{2n+1}) tendent vers 1 en +∞ donc $\lim_{+\infty} U_n=1$

2) $n+(-1)^n \sim n$ car $(-1)^n$=o(n). De même pour $n-(-1)^n$.

Par quotient d'équivalents, $U_n \sim 1$ donc $\lim_{+\infty} U_n=1$

Chapitre 7 : Déterminant

Salut petit bizu, alors bien remis de vendredi soir ?

La fin d'année approche (mais aussi les partiels) donc commence à planifier ton été tout en essayant de valider ton S2 ! Si tu as ouvert ce livre c'est que l'IE arrive à grands pas mais si on est jeudi soir frérot tu forces mais tu devrais pouvoir t'en sortir. Quand tu arrives au chapitre sur les déterminants le plus dur est derrière toi donc essaye de te rassurer pour l'IE en le maitrisant à la perfection. En vrai, il est pas bien compliqué juste apprend ton cours et soit méthodique dans les exos et tout devrait bien se passer.

Pour commencer, grosse dédicace aux Rescoussiens (certains diront la Djackliste mais tkt), à notre braquage durant la campagne et à cette IE de méca qui nous a tous mis dans la sauce dès le début du S2. Big up aux autres listes avec qui on vous a concocté une bête d'inté. Évidemment dédicace au G6soif, une classe de folie avec des surnoms t'as peur : croquette, inox, la passe dé, **π**=2,2 … on vous aime. Comment ne pas oublier la plus ancienne et la meilleure mif de l'insa aka les Djackizz, des repas plus que douteux ces derniers temps avec des futurs resps plus que discutables mais surtout grosse dédi à la 505 qu'on aura ruiné plus d'une fois pendant des escas cœur sur vous les gars.

Signé Maxime aka le V

COURS

1. Calcul de déterminants

Calculer des déterminants, c'est vraiment pas la chose la plus compliquée du semestre donc essaie de t'appliquer parce que c'est juste des méthodes à avoir et ensuite ça va tout seul donc au caaaalme tu vas valider :

1) Matrices carrées d'ordre 2

Il n'y a rien de plus simple que de calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2. C'est une petite formule à connaître, pour une matrice M tel que :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On calcule det(M) = ad-cb

T'as vu c'est grave simple (certes c'est pas très utile sur une matrice 2x2) mais c'est important pour pouvoir calculer les déterminants de matrices d'ordre supérieur !

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Det(M) = -1 × 5 – 3 × 2 = -11

J'espère que t'as capté le truc maintenant on passe à la vitesse supérieure.

2) Matrices carrées d'ordre 3

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3. Avant de présenter ce calcul pour une matrice d'ordre n (c'est-à-dire le cas général), je vais te montrer une petite technique des familles qui pourra t'aider si tu oublies la formule barbare qui t'attend juste après 😉.

C'est ce qu'on appelle la règle de Sarrus, elle se décompose en 3 étapes plutôt simples :

1. On recopie les deux premières colonnes de la matrice à droite de celle-ci
2. On somme les produits des coefficients des 3 diagonales descendantes \\\
3. Puis on soustrait les produits des coefficients des 3 diagonales montantes ///.

Je sais pas si ma tentative d'explication était claire donc faisons un exemple histoire d'être au point.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

En utilisant la règle de Sarrus, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix}$$

Puis on calcule le déterminant en faisant : Det(A) = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd

/!\ Attention /!: cette règle ne se généralise pas aux dimensions supérieures, elle est uniquement valable en dimension 3.

3) Matrices carrées d'ordre n

Aie… Maintenant, les choses sérieuses commencent. En soit, c'est pas hyper compliqué, faut juste s'entraîner pour être serein pendant l'IE et pas s'emmêler les pinceaux. Je vais essayer de faire ça le plus simplement possible, mais pas facile avec Word qui est pas trop fait pour utiliser des matrices (dis-toi que dès que tu vois une matrice elle a mis environ 5/10 minutes à voir le jour) …

Pour calculer le déterminant d'une matrice d'ordre n, tu peux le calculer à partir d'un développement par rapport à une colonne j, ou par rapport à une ligne i. Peu importe, c'est presque la même formule il ne faut juste pas que tu te mélanges entre les deux.
Pour commencer, sache qu'on note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j d'une matrice A.

Petit exemple en despi :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{A23} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ car on a supprimé la ligne 2 et la colonne 3.

De même, a_{ij} correspond au coefficient placé à la ligne i et à la colonne j, par exemple, pour la matrice A ci-dessus, $a_{12} = 4$ ou $a_{31} = 3$.

Enfin bref, la formule utile est donc :

- En calculant par rapport à la ligne i : **Det(A) =** $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} det(A_{ij})}$
- En calculant par rapport à la colonne j :**Det(A)=**$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} det(A_{ij})}$

Ouais elle a l'air hyper barbare aux premiers abords cette formule, mais rien de bien méchant ! Je vais essayer de détailler au max pour que tu comprennes parce qu'honnêtement même moi j'ai encore du mal à capter la formule.

Déjà, faisons un exemple, c'est le meilleur moyen de comprendre le mécanisme qui est bien plus compréhensible que la formule.

<u>Exemple</u> :

On veut calculer le déterminant de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ grâce à la formule ci-dessus.

Dans un premier temps, choisis une ligne ou une colonne fixe (tu verras après que pour faciliter ton calcul tu pourras faire en sorte, en utilisant le pivot de Gauss, de faire apparaitre des 0, ça te sera vraiment utile. Je ne te le détaillerai pas ici mais tu as des exemples dans les exercices).

Ici, on choisit au hasard de développer par rapport à la colonne 1 (on aurait pu le faire par rapport à n'importe quelle colonne ou ligne mais comme on a pas de personnalité on va prendre la 1[ère] colonne)

On a alors la formule :

Det(A)=$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\, a_{i1} det(A_{i1})}$

$$\begin{aligned} Det(A) &= (-1)^{1+1} \times a_{11} \times \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} \times a_{21} \times \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} \times a_{31} \times \det(A_{31}) \\ &= (-1)^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \times (-1)^4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 12 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

T'as vu, on s'en est sorti au final 😊.

2. Propriétés sur les déterminants

Voici quelques petites propriétés à connaître sur les déterminants qui te seront certainement utiles :

- Déjà, comme dit précédemment, on peut utiliser le pivot de Gauss pour fixer une colonne et soustraire à d'autres colonnes des multiples de cette colonne ou fixer une ligne et soustraire à d'autres lignes des multiples de cette ligne, afin de calculer le déterminant de manière plus simple.

- On peut calculer l'aire d'un parallélogramme en utilisant une matrice d'ordre 2 correspondant à ce parallélogramme (je ne vais pas m'étaler là-dessus c'est uniquement une interprétation graphique), même chose pour le volume en prenant une matrice d'ordre 3.

- Un déterminant est changé en **son opposé** si on échange deux colonnes (ou deux lignes)

- Un déterminant est nul s'il contient une colonne de 0 ou une ligne de 0

- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Par ailleurs, on a quelques propriétés calculatoires :

- det(M×N)=det(M) × det(N)
- det($(M^{-1}) = 1/\det(M)$
- M inversible ⇔ det M ≠ 0

EXERCICES

1.Calculer det(D) de plusieurs manières : $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

2.Calculer det(D) par la méthode de Gauss en gardant L1

$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *(Courage tu peux le faire, je crois en toi)*

3.Calculer det(D) :

$$D = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

CORRIGE

1.i) En développant C_3 : $D = (-1)^{1+3} \times 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 \times 5 = 75$

ii) En développant L_2 : $D = (-1)^{2+3} \times 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -3 \times (-25) = 75$

iii) En transformant la matrice en matrice triangulaire :

$$\text{Det(D)} = \underset{L1<->L2}{-\det}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{L'2<->L'1}{=} -\left(-det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right)\right) = 3 \times 5 \times 5 = 75$$

On a alors utilisé plusieurs des propriétés énoncées tout à l'heure si tu as bien suivi ! Bien les connaître peut vraiment t'aider à grandement simplifier les calculs de déterminants !

$$2. D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ (ce symbole <- est une flèche)

L2<- L2-L1
L3<- L3-2L1
L4<-L4-L1

(déso… rentrer les matrices pour les calculs intermédiaires m'auraient pris un temps fou mais normalement le résultat est juste)

$$= (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \times (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

=4

$$3. D = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & \text{\_}12 \\ 0 & -7 & -12 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -12 \\ 0 & -7 & -12 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = -1$$

C1<-C1+C3 L3<-L3-L1

Maintenant que les déterminants n'ont plus de secrets pour toi, je te souhaite bon courage pour l'IE (et les partiels par la même occasion) et t'inquiètes tout va bien se passer tu l'auras ce S2. Bisssoouuusssss

Chapitre 8 : Réduction d'endomorphismes

Salut ! J'espère que tu apprécies l'algèbre linéaire parce que ce chapitre est un condensé de toutes les notions vues depuis le S2. Bien sûr il y en a des nouvelles, mais si tu as bien suivi jusque là, ça devrait passer tout seul.

Je vais pas trop te souler avec les dédicaces, je suppose que si tu es là c'est pour reviser, mais je tenais quand même à faire un bisous à quelques personnes. D'abord aux Amers (meilleure filière et la plus dure sans aucuns doutes), et puis aux TLS et tous les phénos qu'il y a dedans !

En tout cas accroche toi et lâche rien, c'est bientôt la fin de l'année et les vacances !

Anatole

COURS

Pour tout ce chapitre, E désigne un K-espace vectoriel de dimension n (entier naturel non nul), $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, et f un endomorphisme de E de matrice A dans B.

1. Définitions

1) Valeur propre et vecteur propre

- Cas general :

Soit λ un scalaire. u est un vecteur propre associé à f pour la valeur propre λ élément de K si par definition u est non nul et $f(u)= \lambda u$.

On dit alors que λ est la valeur propre associée au vecteur propre u.

- Cas d'une matrice :

Soit la matrice $A_n(K)$, une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K.

On dit que le scalaire λ appartenant à K est une valeur propre de la matrice A s'il existe une matrice M non nulle telle que :

$A.M = \lambda.M$

On dit alors que λ est la valeur propre associée au vecteur propre M de A.

Remarque :

M est unicolonne et possède n=dim(E) lignes.

Propriétés :

- u est un vecteur propre de f associé à λ si et seulement si $(f-\lambda Id)(u)=0$, c'est-à-dire si u $\in \mathrm{Ker}(f-\lambda Id)$
- un vecteur propre n'a qu'une seule valeur propre associée tandis qu'une valeur propre peut être associée à plusieurs vecteurs propres.
- soit un couple $(\lambda;u)$ de f, tous les vecteurs non nuls colinéaires à u sont aussi des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ.
- en dimension finie, que λ soit une valeur propre de l'endomorphisme f implique que λ soit également une valeur propre de la matrice A.

2) Polynôme caractéristique

- Définition :

Le polynôme caractéristique de f est défini par :

$P_f(\lambda)=\det(f-\lambda Id)$ avec λ valeur propre de f

Le polynôme caractéristique de A est défini par :

$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ avec λ valeur propre de A et I identité de la matrice A

- Détermination des valeurs propres :

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique donc :

- λ est une valeur propre de f si et seulement si $\det(f-\lambda Id)=0$
- λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A-\lambda I)=0$

- Ordre de multiplicité d'une valeur propre :

L'ordre de multiplicité d'une valeur propre de f est l'ordre de multiplicité de cette valeur considérée comme racine du polynôme caractéristique de f.

Exemple : D'après calculs sur une matrice A, on obtient :

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(5-\lambda)(6-\lambda)^2$$

La matrice admet alors 2 valeurs propres : $\lambda=5$ de multiplicité 1

$\lambda=6$ de multiplicité 2

- Propriétés :
- A et ${}^tA$, sa matrice transposée, ont le même polynôme caractéristique.

- une matrice triangulaire A_n (supérieure, inférieure ou diagonale) de K a n valeurs propres (distinctes ou non) qui sont ses coefficients diagonaux.
- une matrice A_n a au plus n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

2. Sous espace propre

1) Définition

Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

Le sous-espace propre de E associé à la valeur propre de λ est par definition

$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f-\lambda Id)$

On peut plus simplement dire que E_λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ union $\{0_E\}$.

2) Détermination d'un sous espace propre

Exemple : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_\lambda(M) = (1-\lambda)^3$

M a donc pour valeur propre λ=1 de multiplicité 3.

Posons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

u est un vecteur propre de M $\Leftrightarrow$ $u \in \mathrm{Ker}(M\text{-}I_3)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ z=0

On paramètre l'équation et on obtient $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$

Ainsi $E_\lambda = \mathrm{Ker}(M\text{-}I_3) = \mathrm{Vect}(\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\})$

3) Propriétés

- E_λ est un sous-espace vectorial de E et $1 \leq \mathrm{Dim}(E_\lambda) \leq n$
- Soit f appartenant à E et λ_0 une valeur propre de f de multiplicité m, alors $1 \leq \mathrm{Dim}(E_{\lambda 0}) \leq m$

- Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres de f distinctes 2 à 2. La somme des sous-espace propres $E_{\lambda 1} + \ldots + E_{\lambda p}$ est toujours directe.
- Soit f appartenant à E et λ_0 une valeur propre de f de multiplicité 1, alors $\mathrm{Dim}(E_{\lambda 0}) = 1$

3. Diagonalisation

1) Définition

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si une des conditions suivantes est réalisée :

- Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f
- Il existe une base B de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_B(E)$ est diagonale
- Une matrice A $\mathrm{Mat}_B(K)$ est diagonalisable si l'endomorphisme f canoniquement associé à A est diagonalisable, c'est-à-dire si grand A est semblable à une matrice diagonale D
-

Remarque : A et B semblables $\Leftrightarrow \exists\, P \in M_n(K)$ inversible
$B = P^{-1}.A.P$

PS1 : Diagonalisation c'est juste pour montrer que les mathématiciens ont le boulard, ça veut tout simplement dire remplacer une matrice par une matrice diagonale (note de l'éminent prédécesseur du fabuleux prédécesseur du sensationnel prédécesseur de mon humble prédécesseur du merveilleux prédécesseur)

2) Théorèmes

Théorème 1 : Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de f ($p \leq n$).
f est diagonalisable si et seulement si E est la somme directe des sous-espaces propres de f, c'est-à-dire $E = E_{\lambda 1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda p}$

Théorème 2 : Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Théorème 3 : E désigne un K-espace vectorial de dimension n entire naturel non nul, f un endomorphisme de E.
F est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Le polynôme caractéristique de f, P_f, est scindé c'est c'est-à-dire P_f admet n racines (distinctes ou confondues) dans K.
- La dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

3) Applications

- 1-Reconnaitre la nature d'une application linéaire

Soit f un endomorphisme de matrice A par rapport à une base B de E.
On suppose que A est diagonalisable et semblable à une matrice D. On suppose, de plus, que la structure de D permet de reconnaitre un type d'endomorphisme particulier : par exemple une projection vectorielle ou une composée de projections avec une homothétie vectorielle. On peut alors en déduire la nature de f.

- 2-Puissance $m^{ième}$ d'une matrice

Soit A une matrice diagonalisable. Il eixiste une matrice P inversible et une matrice D diagonalisable telle que $A=P.D.P^{-1}$.
Alors pour tout entier m positif : $A^m=P.D^m.P^{-1}$.
Comme D est diagonal, D^m se calculi facilement et il ne reste plus que 2 produits de matrices à faire pour calculer A^m.

- 3-Système d'équation différentiel linéaire

Quand tu lis la méthode théorique, ça fait mal à la tête, du coup j'ai décidé de te mettre un exemple (assez long certes mais tu comprendras mieux).

$$(S) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - 2z \\ \frac{dy}{dt} = 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(S) ⇔ $\frac{d}{dt}X = AX$

A semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D = $P^{-1}DP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On effectue un changement de fonctions :
x, y, z : anciennes
x_1, y_1, z_1 : nouvelles

$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ avec $X_1=P^{-1}X$ et $X=PX_1$

(S) ⇔ $\frac{d}{dt}X = AX$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(PX_1) = A(PX_1)$

$\Leftrightarrow P\frac{d}{dt}X_1 = APX_1$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}X_1 = (P^{-1}AP)X_1$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}X_1 = DX_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = 3z_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = \alpha e^t \\ y_1(t) = \beta e^t \\ z_1(\mathrm{t}) = \gamma e^t \end{cases}$$

Donc $X_1 = \begin{cases} \alpha e^t \\ \beta e^t \\ \gamma e^t \end{cases}$ $\quad$ $X = PX_1 = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t} \\ \alpha e^t + 2\beta e^{2t} - \gamma e^{3t} \\ \alpha e^t + \gamma e^{3t} \end{pmatrix}$

Conclusion : $\begin{cases} x(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t} \\ y(t) = \alpha e^t + 2\beta e^{2t} - \gamma e^{3t} \\ z(t) = \alpha e^t + \gamma e^{3t} \end{cases}$

EXERCICES

Exercice 1

Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. Déterminer les vecteurs propres de A
3. A est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser A et déterminer sa matrice de passage.

CORRIGE

1. On cherche le polynôme caractéristique de A :

$P(\lambda) = |A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$

(factorisation du polynôme)

P a pour racines -1, 1 et 2, qui sont donc aussi les valeurs propres de A.

2. On résout :

$$AX1 = -1 * X1 \Leftrightarrow (A+I_3)X2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ -2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ 2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$$

On prend donc par exemple :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même, on trouve par exemple

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{cases} y = z \\ x = -z \end{cases}$$

$$\text{Et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

3. A est d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. On a : $A=PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de A de la base B canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base B' formée par les 3 vecteurs propres. $B'=(X_1,\ X_2,\ X_3)$.

D'où $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Les 3 vecteurs propres en colonne et dans l'ordre)

D est constituée des trois valeurs propres placées dans sa diagonale, dans le même ordre que les vecteurs propres :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque :</u> Fais attention de bien respecter l'ordre des vecteurs dans P et D, sinon l'égalité $A=PDP^{-1}$ ne sera plus exacte.

Cet exercice est global et sa méthode de résolution est toujours similaire. Je te conseille d'aller voir des vidéos sur Youtube (par exemple Méthode Maths), qui expliquent assez bien et sûrement mieux que moi.

On ne se voit pas à la K-Fet p'tit bizuth.